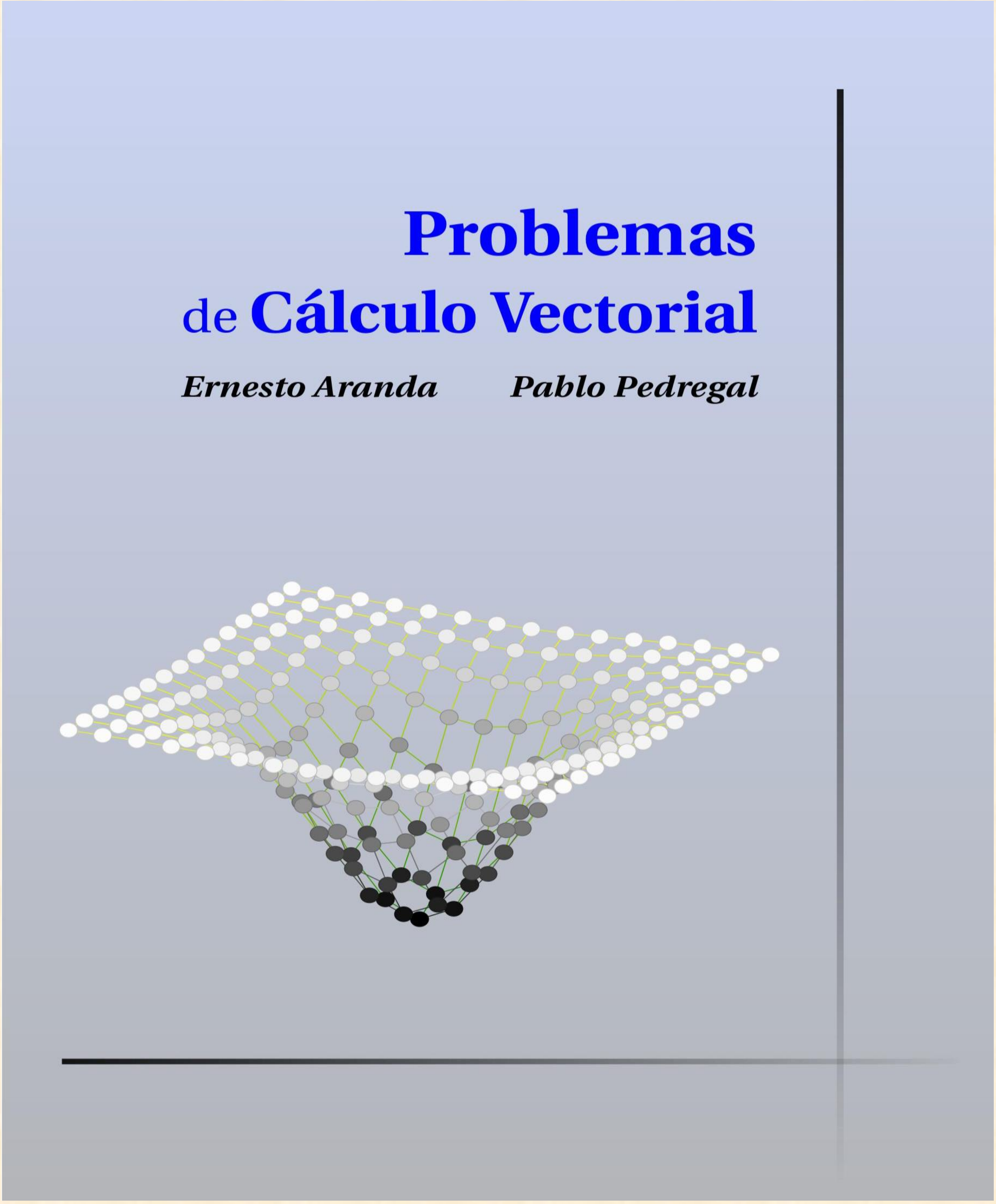
# Probleme de calcul vectorial

traducere de

## Nicolae Coman

după lucrarea



Ernesto Aranda Pablo Pedregal
Universidad de Castilla - La Mancha

# PROBLEMAS DE CÁLCULO VECTORIAL

Título: *Problemas de Cálculo Vectorial*
*Tercera Edición, febrero 2013*

Primera edición publicada por Septem Ediciones, marzo 2004
Segunda edición publicada por Lulu.com, enero 2009



Impreso por Lulu.com

## CUPRINS

# GEOMETRIA FUNCTIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

În acest capitol introductoriu vom recapitula câteva cunoştinţe necesare în studiul funcţiilor cu mai multe variabile.

## GEOMETRIA PLANA SI IN SPATIU

■ Stabiliţi dacă următoarele triplete de puncte sunt coliniare.

**1.** $(1,1)$, $(2,4)$, $(-1,\ -2)$. **2.** $(4,0)$, $(0,1)$, $(12,-2)$.
**3.** $(3,-1)$, $(1,0)$, $(-3,2)$ **4.** $(0,0)$, $(3,2)$, $(1,5)$.

**Soluţie**:

**1.** Nu.

**2.** Trei puncte sunt coliniare dacă vectorii care îi unesc sunt coliniari. Construim vectorii:

$$\boldsymbol{u_1} = (4,0) - (0,1) = (4,-1), \qquad \boldsymbol{u_2} = (12,-2) - (0,1) = (12,-3).$$

Mai avem de verificat dacă determinantul format de aceşti vectori este nul, ceea ce se verifică foarte uşor.

**3.** Da.

**4.** Deoarece unul dintre puncte este chiar originea, este suficient să verificăm dacă vectorii $(3,2)$ şi $(1,5)$ sunt coliniari. Dar determinantul format de aceştia nu este nul deci răspunsul este negativ.

---

■ Determinaţi ecuaţia dreptei perpendiculare pe vectorul $\boldsymbol{v}$ şi care trece prin punctul $P$ în cazurile:

**5.** $\boldsymbol{v} = (1,-1)$, $P = (-5,3)$. **6.** $\boldsymbol{v} = (-5,4)$, $P = (3,2)$.
**7.** $\boldsymbol{v} = (0,1)$, $P = (0,3)$. **8.** $\boldsymbol{v} = (2,3)$, $P = (-1,-1)$.

**Soluţie**:

**5.** $y = x + 8$.

**6.** $4y = 5x - 7$.

**7.** Se ştie că dreapta perpendiculară pe vectorul $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ şi care trece prin punctul $P = (x_1, x_2)$ are ecuaţia:

$$v_1(x - x_1) + v_2(x - x_2) = 0\,.$$

În cazul nostru, obţinem dreapta de ecuaţie $y = 3$.

**8.** $2x + 3y = -5$.

---

■ Care dintre următoarele perechi de drepte sunt perpendiculare?

**9.** $2x - 5y = 1,\ \ 2x + y = 2$. **10.** $3x - 5y = 1$, $5x + 3y = 7$.
**11.** $-x + y = 2$, $x + y = 9$. **12.** $x + 2y = 5$, $y = 3 + 2x$.

**Soluţie**:

**9.** Nu.

**10.** Verificarea perpendicularității a două drepte se reduce la verificarea perpendicularității vectorilor directori sau a vectorilor normali. Aceasta are loc atunci când produsul lor scalar este nul.

Pentru dreapta de ecuație

$$ax + by + c = 0$$

vectorul normal este dat de $(a, b)$.

În cazul nostru:

$$(3, -5) \cdot (5, 3) = 0\,,$$

deci cele două drepte sunt perpendiculare.

**11.** Da.

**12.** Da.

---

■ Scrieți ecuațiile dreptelor care trec prin perechile de puncte:

**13.** $(1, 1, -1),\ (-2, 1, 3)$. **14.** $(-1, 5, 2),\ (3, -4, 1)$.

**15.** $(1, 0, 1),\ (0, 1, 0)$. **16.** $(0, 1, 2),\ (-1, 0, 3)$.

**Soluție**:

**13.** În general, dreapta din spațiu care trece prin punctele $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ este dată de ecuațiile parametrice:

$$x = tp_1 + (1 - t)q_1\,,$$
$$y = tp_2 + (1 - t)q_2\,,$$
$$z = tp_3 + (1 - t)q_3\,,$$

unde $t$ este un parametru ce parcurge dreapta reală.

În exemplul nostru, ecuațiile parametrice sunt:

$$x = 3t - 2, \qquad y = 1, \qquad z = 3 - 4t\,.$$

**14.** $x = 3 - 4t, \qquad y = 9t - 4\,, \qquad z = 1 + t\,.$

**15.** $x = t\,, \qquad y = 1 - t\,, \qquad z = t.$

**16.** $x = -1 + t\,, \qquad y = t\,, \qquad z = 3 - t\,.$

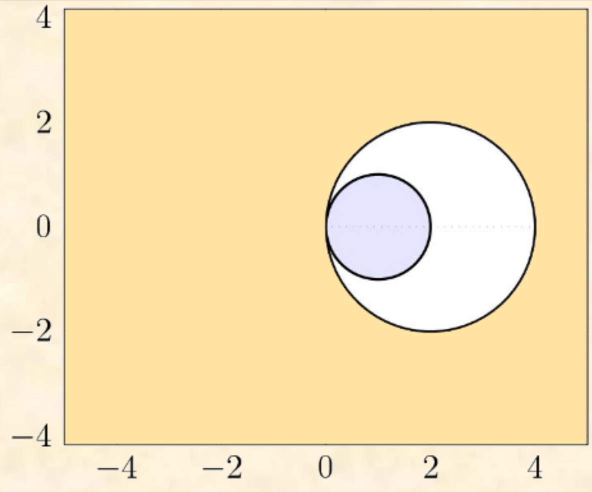



**Fig. 1.** Exercițiul 59: Regiunea $(4x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2x) \leq 0$

## CONICE SI CUADRICE

## Coordonate polare, cilindrice si sferice

# Functii de mai multe variabile. Limita si continuitate

## Functii de mai multe variabile

## Limita si continuitate

# Calcul diferential

## Derivate partiale

## Derivate de ordin superior

## Derivata implicita. Polinomul lui Taylor

# Optimizare

## Puncte critice si extreme

## Extreme conditionate

# Integrare multipla

## Integrale duble

## Integrale triple

## Schimbari de variabila

# Geometrie diferentiala

## Curbe in plan si in spatiu

## Lungimea unui arc de curba

## Suprafete

# ANALIZA VECTORIALA

## CAMPURI VECTORIALE. POTENTIAL SCALAR

## INTEGRALE DE LINIE. CAMPURI CONSERVATIVE

## TEOREMA LUI GAUSS

## TEOREMA LUI STOKES

## POTENTIAL VECTORIAL

# SOLUTII

■ • ✦ ✷