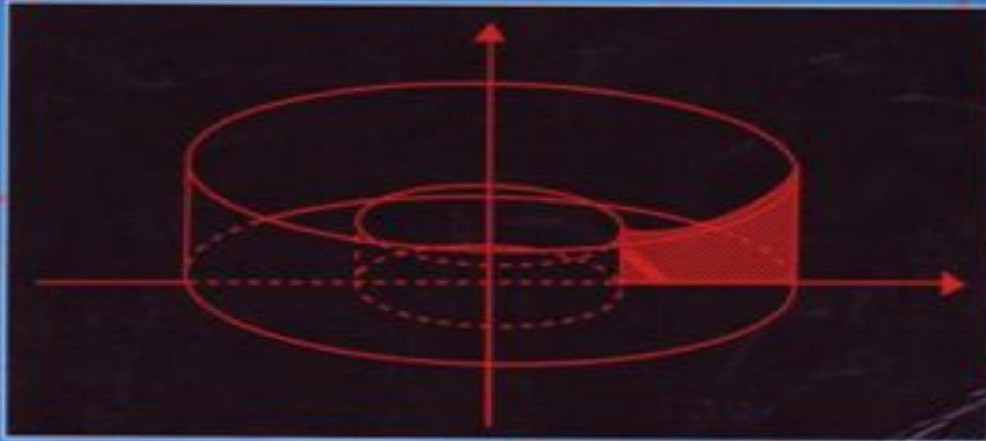


CALCULUS

Introduction to Theory
and Applications
in Physical and Life Sciences

R. M. Johnston



Albion Publishing Series



Mathematics & Applications

Analiză matematică

și aplicații în fizică și în alte științe

Nicolae Coman

1/16/16

Traducere după «Johnson
– Calculus»

Cuprins

00. Recapitulare din algebră, geometrie, trigonometrie	1
01. Limite și diferențială	5
02. Diferențiala produsului și raportului	6
03. Derivate de ordin superior	6
04. Integrală	6
05. Integrală definită	7
06. Puncte staționare și puncte de inflexiune	7
07. Diferențiala funcțiilor implicite	8
08. Funcțiile exponențială, logaritmică și hiperbolice	8
09. Funcțiile inverse trigonometrice și hiperbolice	8
10 Metode de integrare	9
11. Alte aplicații ale integralei	9
12. Aproximarea integralei	9
13. Serii infinite	10
14. Ecuații diferențiale	10
15. Anexă	10

00. Recapitulare din algebră, geometrie, trigonometrie

0.1. Introducere

Pentru aprofundarea acestui curs este necesară revizuirea cunoștințelor de algebră, geometrie și trigonometrie.

0.2. Funcții

Noțiunea de *funcție* este utilizată pentru a descrie o relație care atribuie unui element al unei mulțimi (de obicei mulțime de numere) o anumită valoare. În general, relația este descrisă printr-o formulă.

Iată câteva exemple:

(i) $A = \pi r^2$. Spunem că A este funcție de r deoarece oricărei valori a lui r îi corespunde o valoare a lui A . Se mai poate scrie $A = A(r)$.

(ii) $v = \sqrt{20h}$. La fel se poate scrie $v = f(h)$ sau $v = v(h)$.

Așadar vom scrie $y = f(x)$ și spunem că " y este o funcție de x " sau că " y depinde de x ".

x se numește **variabilă independentă**, iar mulțimea de valori pe care o poate parcurge se numește **domeniul de definiție** al funcției.

y se numește **variabilă dependentă**, iar mulțimea de valori ale lui y (corespunzătoare valorilor lui x din domeniul de definiție) se numește **codomeniul** funcției.

Type equation here.

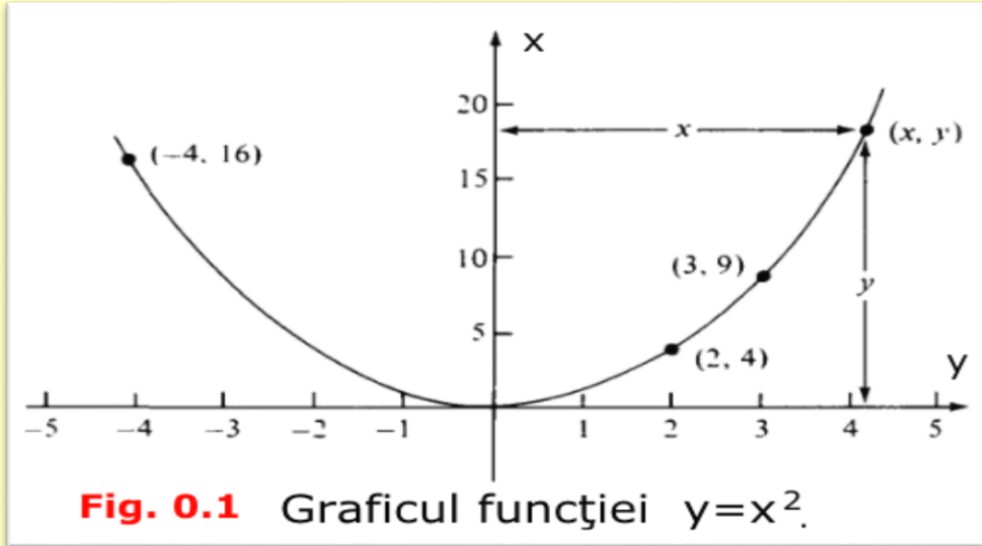
Type equation here.

Type equation here.

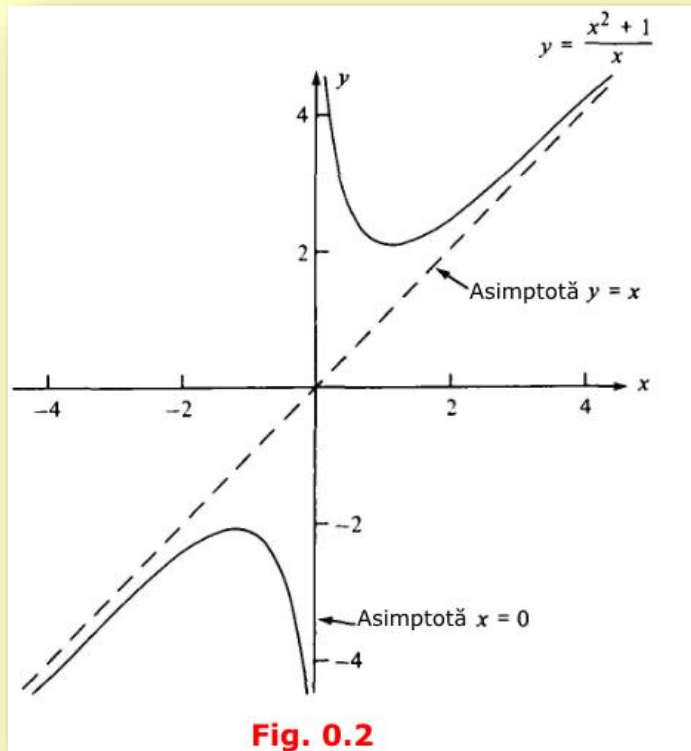
Type equation here.
Type equation here.

0.3. Graficul unei funcții

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.



Type equation here.
Type equation here.



Type equation here.
Type equation here.

Type equation here.

0.4. Logaritmi

Funcția definită prin $y = a^x$, $a > 0$, este numită **funcție exponențială** cu exponentul a .

Pentru a scrie ecuația $y = a^x$ cu x exprimat în funcție de y , definim **funcția logaritmică** cu bază a :

$$x = \log_a y.$$

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

0.5. Frații parțiale

Metoda fracțiilor parțiale este utilizată pentru simplificarea studiului funcțiilor raționale (raportul a două polinoame). Dacă gradul polinomului deîmpărțit nu este mai mic decât al celui împărțitor, atunci funcția rațională poate fi exprimată astfel:

$$\text{polinomul cât} + \frac{\text{polinomul rest}}{\text{polinomul împărțitor}}.$$

Metoda este explicată în câteva exemple.

Exemplul 0.3.

Simplificați fracția rațională

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 4x + 4}{x^4 - 1}.$$

Se remarcă faptul că gradul împărțitorului este mai mare decât cel al deîmpărțitului și primul pas constă în descompunerea acestuia din urmă: $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

Atunci funcția rațională se poate exprima ca sumă de funcții mai simple, ca:

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 4x + 4}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Efectuând operațiile și identificând coeficienții, obținem:

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 4x + 4}{x^4 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} + \frac{3x - 1}{x^2 + 1}.$$

Exemplul 0.4.

Să exprime

$$\frac{x^5 - 3x + 1}{x(x + 1)^3}$$

ca sumă de fracții simple.

Mai întâi remarcăm faptul că gradul numărătorului este mai mare decât cel al numitorului, deci este necesar să determinăm un cât $Q(x)$ și un rest $R(x)$ astfel încât:

$$\frac{x^5 - 3x + 1}{x(x + 1)^3} = Q(x) + \frac{R(x)}{x(x + 1)^3},$$

unde gradul lui $R(x)$ să fie mai mic decât 4. $Q(x)$ și $R(x)$ se obțin egalând coeficienții termenilor x la aceeași putere din egalitatea:

$$x^5 - 3x + 1 = (x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x)Q(x) + R(x).$$

Obținem: $Q(x) = x - 3$, $R(x) = 6x^3 + 8x^2 + 1$ și deci:

$$\frac{x^5 - 3x + 1}{x(x + 1)^3} = x - 3 + \frac{6x^3 + 8x^2 + 1}{x(x + 1)^3}. \quad (0.3)$$

0.6. Geometria analitică a cercului și a drepte

Multe aplicații ale analizei matematice necesită cunoștințe de geometrie analitică.

(i) **Distanța** dintre punctele de coordonate (x_1, y_1) și (x_2, y_2) este:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(ii) **Gradientul** (Panta) dreptei care unește punctele (x_1, y_1) și (x_2, y_2) este:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Să remarcăm că m este și tangenta unghiului format de dreaptă cu axa Ox .

(iii) **Ecuția dreptei** de gradient m și care trece prin punctul (x_0, y_0) :

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

(iv) **Forma explicită** a ecuației dreptei:

$$y = mx + c,$$

care reprezintă o dreaptă de pantă m și care trece prin punctul $(0, c)$.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

07. Formule trigonometrice

Majoritatea formulelor trigonometrice sunt derivate din:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

Cele mai utilizate formule sunt următoarele:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (0.6)$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (0.7)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (0.8)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \quad (0.9)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \quad (0.10)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)] \quad (0.11)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \quad (0.12)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] \quad (0.13)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} \quad (0.14)$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{y - x}{2}. \quad (0.15)$$

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

01. Limite și diferențială

1.1. **Introducere**

Comportamentul unei funcții dată de legea $f(x)$ când x devine din ce în ce mai mare a fost studiat în secțiunea 0.3. De exemplu, funcția dată de:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

se apropie de valoarea zero când x devine din ce în ce mai mare (pozitiv sau negativ). Spunem că *limita* lui $f(x)$ este zero când x tinde către infinit.

În acest capitol ne vom ocupa mai în detaliu de această chestiune și vom considera de asemenea și limita unei funcții când variabila independentă tinde către un număr finit.

Conceptul de limită este necesar la studiul diferențialei, așa cum se va vedea în secțiunea 1.3.

1.2. **Definiția limitei**

Prima definiție se referă la limita unei funcții când variabila tinde către un număr finit.

Spunem că funcția $f(x)$ *tinde către limita* l când x tinde către a dacă putem face pe $f(x)$ cât de aproape dorim de numărul l sau mai simplu dacă luăm un x suficient de apropiat de a , atunci $f(x)$ rămâne apropiat de l când x devine tot mai apropiat de a .

Acest lucru se scrie $f(x) \rightarrow l$ când $x \rightarrow a$ sau:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

Definiția *nu implică* faptul că $f(a) = l$. Pot exista cazuri în care $f(a)$ nu este definit. De exemplu, să considerăm funcția:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}.$$

Se observă că $f(1)$ nu este definit, deoarece valoarea $x = 1$ nu aparține domeniului de definiție.

Dar, pentru $x \neq 1$, avem $f(x) = x + 1$. Așadar, putem face pe $f(x)$ cât mai apropiat de 2 luând x tot mai apropiat de 1, adică:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow 2 \text{ când } x \rightarrow 1.$$

sau

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Graficul funcției

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

este chiar dreapta de ecuație $y = x + 1$, din care lipsește punctul (1,2).

Vom vedea în secțiunea 1.3 cum acest exemplu este legat de noțiunea de diferențială.

A doua definiție a limitei se referă la cazul când argumentul tinde către infinit.

Spunem că funcția $f(x)$ tinde către o limită l când x tinde către infinit dacă putem face $f(x)$ oricât de aproape de numărul l luându-l pe x suficient de mare.

($f(x)$ trebuie să se mențină aproape de l când x devine tot mai mare.)

Se scrie $f(x) \rightarrow l$ când $x \rightarrow \infty$ sau

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l.$$

02. Diferențiala produsului și raportului

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

03. Derivate de ordin superior

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

04. Integrală

Type equation here.

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

05. Integrală definită

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

06. Puncte staționare și puncte de inflexiune

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

07. Diferențiala funcțiilor implicite

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

08. Funcțiile exponențială, logaritmică și hiperbolice

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

09. Funcțiile inverse trigonometrice și hiperbolice

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

Type equation here.

10 Metode de integrare

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

11. Alte aplicații ale integralei

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

12. Aproximarea integralei

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

13. Serii infinite

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

14. Ecuații diferențiale





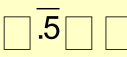
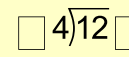
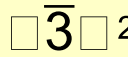
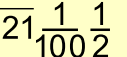


Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

15. Anexă

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

Courier New, *Curly MT*, DaunPenh, DFKai-SB, DilleniaUPC,
 DokChampa, Dotum, DotumChe, Ebrima, *Edwardian Script*
ITC, **Elephant**, ENGRAVERS MT, **Eras Bold ITC**,
ErasDemi ITC, Eras Light ITC, Eras Medium ITC, Estrangelo
 Edessa, Euclid, Ευχλιδ Εξτρα (Euclid Extra), Euclid Fraktur,
 EYXΛΙΑ MATH ONE EYXΛΙΑ MATH ΤΩΟ
 Ευχλιδ Σψμβολ, Eucrosia UPC, Euphemia, Fang Song, FELIX
 TITLING, Fences (Fences), Footlight MT Light, **Forte**, Franklin
 Gothic Book, **Franklin Gothic Demi**, **Franklin Gothic Demi Cond**,
Franklin Gothic Heavy, Franklin Gothic Medium, Franklin Gothic
Medium Cond, Fresia UPC, *Freestyle Script*, *French Script MS*, Gabriola, Gadugi,
 Garamond, Gautami, Georgia, *Gigi*, Gill Sans MT, Gill Sans MT
 Condensed, Gill Sans MT Condensed Bold, **Gill Sans Ultra Bold**, **Gill Sans**
Ultra Bold Condensed, Gisha, Gloucester MT Extra Condensed, Goudy Old
 Style, **GOUDY STOUT**, Gulim, Gulim Che,
 Gung Suh, Gung SuhChe, **Haettenschweiler**, *Harlow Solid Italic*,
 Harrington, High Tower Text, **Impact**, Imprint MT Shadow,
Informal Roman, Iris UPC, Iskoola Pota, Jasmine UPC, **Jokerman**, Juice ITC,
 KaiTi, Kalinga, Kartika, Khmer UI, KodchiangUPC, Kokila,
KristenITC, *Kunstler Script*, Lao UI, Latha, Leelawadee,
 LilyUPC, Lucida Bright, *Lucida Calligraphy*, Lucida
 Console, Lucida Fax, *Lucida Handwriting*, Lucida
 Sans, Lucida Sans Typewriter, Lucida Sans
 Unicode, **Magneto**, Maiandra GD, Malgun Gothic, Mangal,
Matura MT Script Capitals, Meiryō, Meiryō UI, Microsoft
 Himalaya, Microsoft JhengHei, Microsoft JhengHei UI,

Microsoft New Tai Lue, Microsoft PhangsPa, Microsoft Sans
Serif, Microsoft Tai Le, Microsoft Uighur, **Microsoft YaHei**,
Microsoft YaHei UI, Microsoft Yi Baiti, MingLiU,
MingLiU_HKSCS, MMinGLiU_HKSCS-ExtB, MingLiU-ExtB,
Mistral, Modern No.20, Mongolian Baiti, *Monotype Corsiva*, MoolBoran,
MS Gothic, MS Mincho,   (MS Outlook), **MS PGothic**,
MS PMincho, **MS Reference Sans Serif**,
 ¹⁸ ^{.5} ⁴¹² ³ ²²¹₁₀₀¹₂ (**MS Reference
Specialty**), [→] (MT Extra), MT ξτρα Τίγερ (MT Extra
Tiger), *MV Boli*, Niagara Engraved, Niagara Solid, Nirmala UI, NsimSun, Nyala,
OCR A Extended, **Old English Text MT**, **Onyx**, *Palace Script*
M.T. Palatino Linotype, Papyrus,  Barchment, Perpetua, PERPETUA
TITLING, Plantagenet Cherokee, **Playbill**, PMingLiU, PMingLiU-
ExtB, Poor Richard, *Pristina*, Raavi,