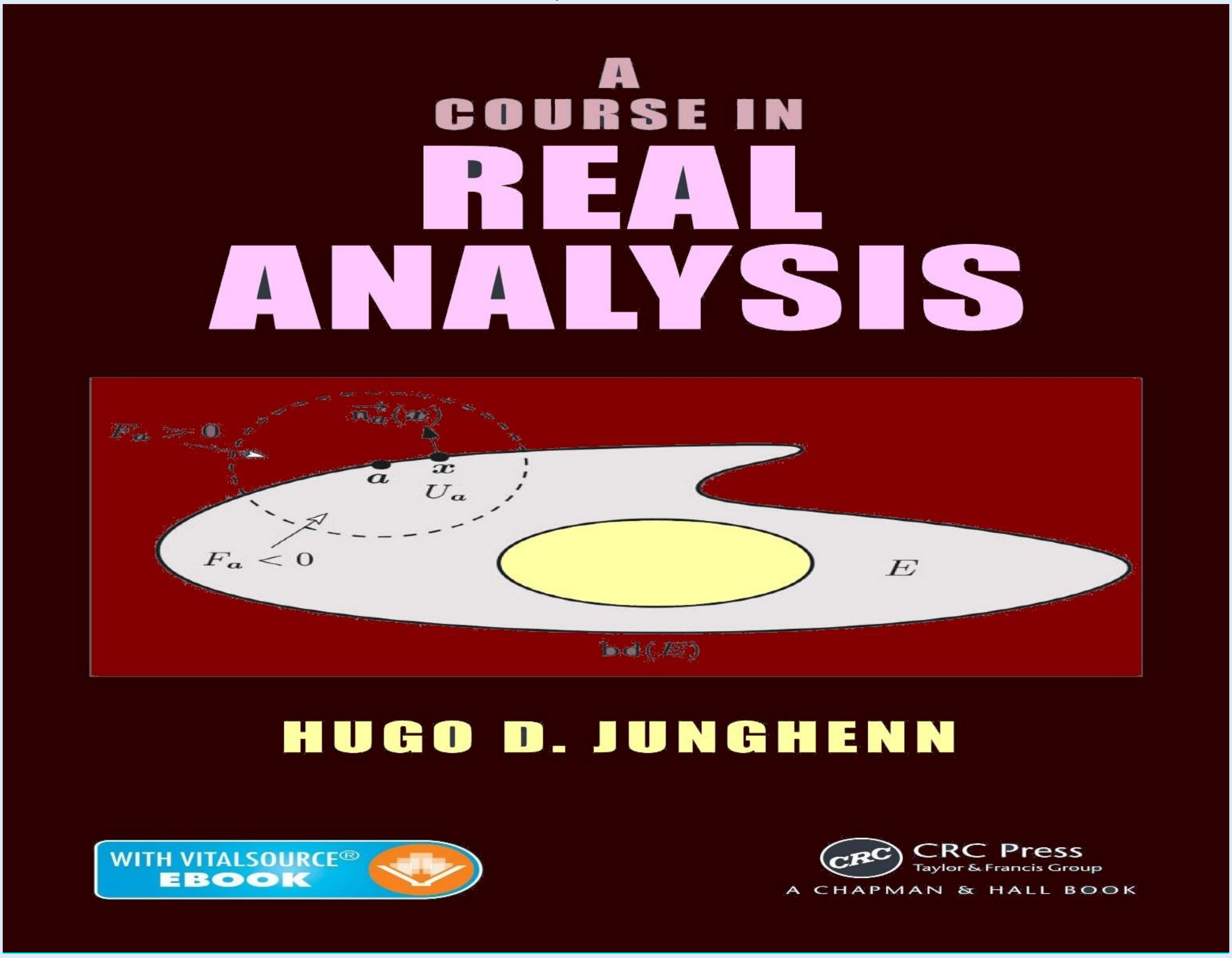
Curs de analiză matematică reală

TRADUCERE DE

Nicolae Coman

după lucrarea



A COURSE IN REAL ANALYSIS

HUGO D. JUNGHENN
The George Washington University
Washington, D.C., USA

CRC Press
Taylor & Francis Group
Boca Raton London New York

CRC Press is an imprint of the
Taylor & Francis Group, an **informa** business
A CHAPMAN & HALL BOOK

Cuprins

Partea I. Functii de o variabila

1. Multimea numerelor reale

Noţiunile de limită şi de număr real stau la baza analizei matematice. În acest capitol se va defini mulţimea numerelor reale. Aceasta este o mulţime nevidă, notată $\mathbb{R}$, la care se ataşează două operaţii algebrice, una *aditivă* şi alta *multiplicativă*, o relaţie de ordine, împreună cu care $\mathbb{R}$ va satisface trei grupuri de axiome: axiome *algebrice* (sau de *corp*), *axiome de ordine* şi *axiome de completitudine*.

1.1. De la numere naturale la numere reale

O construcţie riguroasă a mulţimii numerelor reale porneşte de la mulţimea numerelor naturale.
Această mulţime, notată $\mathbb{N}$, se va extinde la mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$, apoi la cele raţionale $\mathbb{Q}$, ca în final să se ajungă la $\mathbb{R}$.
Mulţimea $\mathbb{N}$ este considerată ca satisfăcând *axiomele lui* **Peano** . Acestea sunt utilizate pentru a defini operaţiile de adunare şi înmulţire pe $\mathbb{N}$. Scăderea este introdusă prin extinderea lui $\mathbb{N}$ la $\mathbb{Z}$ şi aceasta permiţând existenţa soluţiilor tuturor ecuaţiilor de tip $x+m=n$, $m,n \in \mathbb{Z}$. Pentru a se ajunge la operaţia de împărţire, mulţimea $\mathbb{Z}$ se extinde la $\mathbb{Q}$ formând toate câturile m/n, unde $m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Astfel ne putem asigura că au soluţie toate ecuaţiile de tip $ax+b=c$, $a \neq 0$.
În final, construcţia lui $\mathbb{R}$ pornind de la $\mathbb{Q}$ poate fi văzută ca „umplerea unor goluri” de pe dreapta numerelor raţionale şi care corespund *numerelor iraţionale*.

1.2. Proprietati algebrice ale numerelor reale

Operaţiile aditivă şi multiplicativă conferă mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$ o structură de *corp*, deci satisfac axiomele (unde a,b,c sunt numere reale arbitrare):

- Adunarea este o lege de compoziţie internă: $a+b \in \mathbb{R}$.
- Adunarea este asociativă: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
- Este comutativă: $a+b=b+a$.
- Existenţa elementului neutru: Există un $0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+0=a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- Existenţa elementului opus: Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un $-a \in \mathbb{R}$, astfel încât $a+(-a)=0$.
- Înmulţirea este lege de compoziţie internă: $a \cdot b \in \mathbb{R}$.
- Este asociativă: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.
- Este comutativă: $a\cdot b = b\cdot a$.
- Existenţa elementului neutru: Există un $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, cu proprietatea că $a\cdot 1 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- Existenţa elementului invers: Pentru orice $a \neq 0$ există un $a^{-1} \in \mathbb{R}$ astfel încât $a\cdot a^{-1}=1$.
- Înmulţirea este distributivă faţă de adunare: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

Se vor utiliza notaţiile

$$a-b=a+(-b), \qquad ab=a\cdot b, \qquad \frac{a}{b}=a/b=ab^{-1},$$
$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c), \qquad abc=(ab)c=a(bc),$$
$$a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n} \qquad a^{-n}=1/a^n \;\; (a\neq 0) \text{ şi } a^0 = 1 .$$

Se vor utiliza simbolurile pentru *sumă* şi *produs* Σ şi Π definite astfel:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \quad \text{și} \quad \prod_{j=m}^{n} a_j = a_m a_{m+1} \dots a_n .$$

Pe baza axiomelor prezentate anterior, se pot deduce celelalte proprietăţi algebrice ale lui $\mathbb{R}$. multe din acestea vor fi regăsite în exerciţiul 1.

1. 2. 1 Propoziţie. Pe $\mathbb{R}$ sunt valabile următoarele proprietăţi algebrice:

(a) *Elementul neutru pentru adunare este unic.*

(b) *Elementul opus (pentru adunare) este unic pentru fiecare număr real.*

(c) *Elementul neutru pentru înmulţire este unic.*

(d) $a \cdot 0 = 0, \qquad \forall a \in \mathbb{R}$.

(e) *Elementul invers (pentru înmulţire) este unic pentru orice număr nenul.*

(f) *Dacă* $ab = 0$, *atunci fie* $a = 0$, *fie* $b = 0$.

(g) *Dacă* $ab = ac$ *şi* $a \neq 0$, *atunci* $b = c$.

(h) *Dacă* $b \neq 0$ *şi* $d \neq 0$, *atunci* $a/b = c/d$ *dacă şi numai dacă* $ad = bc$.

(i) *Dacă* $a \neq 0$ *şi* $b \neq 0$, *atunci* $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, *sau* $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\frac{1}{b}$.

Demonstraţie. (**a**) Dacă există un $0' \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + 0' = a$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, atunci avem şi $0 + 0' = 0$. Dar, prin definiţia lui 0 şi pe baza comutativităţii, $0 + 0' = 0'$. Deci $0 = 0'$.

(**b**) Pe baza asociativităţii şi comutativităţii adunării:

$$b = b + 0 = 0 + b = (-a + a) + b = -a + (a + b) = -a + 0 = -a.$$

(**c**) Dacă există un $1' \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a \cdot 1' = a \ \forall\, a \in \mathbb{R}$, atunci în particular $1 \cdot 1' = 1'$. Deci $1 = 1'$.

(**d**) Pe baza proprietăţii de distributivitate:

$$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Se adună $-(a \cdot 0)$ la ambii membri şi se utilizează proprietatea de ascociativitate.

(**e**) Prin asociativitatea şi comutativitatea înmulţirii:

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 1 = a^{-1} .$$

(**f**) Dacă $a \neq 0$, folosind (d) şi proprietatea de comutativitate şi asociativitate a înmulţirii:

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = (a^{-1})(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b .$$

(**g**) Aplicând proprietatea de asociativitate şi comutativitate a înmulţirii,

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = c .$$

(**h**) Dacă $a/b = c/d$, atunci multiplicând ambii membri cu bd şi utilizând proprietatea de comutativitate şi de asociativitate a înmulţirii obţinem $ad = bc$. Reciproc, dacă $ad = bc$, atunci înmulţind ambii membri cu $1/(bd)$, obţinem $a/b = c/d$.

(**i**) $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1$, apoi se aplică (e).

Cititorul a remarcat că cele mai multe afirmaţii folosite anterior sunt *implicaţii*, adică propoziţii de tip p implică q şi care se scrie $p \Rightarrow q$. Astfel de afirmaţii pot fi demonstrate direct presupunând că p este adevărată şi apoi deducând q sau indirect presupunând negaţia lui q şi ajungând la o contradicţie sau la negaţia lui p.

Punctul (h) al propoziţiei anterioare conţine o afirmaţie de tip p este adevărată dacă şi numai dacă q este adevărată adică $p \Rightarrow q$ şi $q \Rightarrow p$. Pe parcursul acestei lucrări vom mai întâlni astfel de propoziţii.

O altă chestiune de logică: Pentru a demonstra că o propoziţie care conţine un cuantificator universal („oricare ar fi”, „pentru orice”) este falsă trebuie construit un *contraexemplu*. De exemplu, pentru a demonstra că propoziţia „$xy = x + y$ pentru orice pereche de numere reale” este falsă, este suficient să găsim o pereche de numere $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $xy \neq x + y$, de exemplu $x = y = 1$.

Exerciţii

1. Demonstraţi următoarele proprietăţi ale adunării şi înmulţirii numerelor reale:

(**a**) $-(-a) = a$. (**b**) $-(ab) = a(-b)$ (**c**) $(-a)(-b) = ab$. (**d**) $(-1)a = -a$.

(**e**) Dacă $b, d \neq 0$, atunci $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b}\frac{d}{c}$.

(**f**) Dacă $b \neq 0$ şi $d \neq 0$, atunci $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Observaţie. Punctul (c) va fi utilizat în 1.3.2.

R. (**b**) $[(ab)+(-a)b]=[a+(-a)]b=0\cdot b=0$, iar unicitatea inversului pentru operaţia aditivă implică $-(ab) = (-a)b$. Un argument similar poate fi adus pentru a doua egalitate.

2. Fie $r, s \in \mathbb{Q}$. Presupunând că $\mathbb{Z}$ este închisă în raport cu adunarea şi înmulţirea, să se demonstreze că $r \pm s, rs, r/s \in \mathbb{Q}$, ultima fiind valabilă pentru $s \neq 0$.

3. Dacă $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ şi $x \in \mathbb{I}$, să se demonstreze că $r \pm x, rx, r/x \in \mathbb{I}$.

4. Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze fără a folosi inducţia matematică următoarele egalităţi:

(**a**) $x^n - y^n = (x-y)\sum_{j=1}^{n} x^{n-j}\, y^{j-1}.$

(**b**) $x^n + y^n = (x+y)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}x^{n-j}\, y^{j-1},$ dacă n este impar.

(**c**) $x^{-n} + y^{-n} = (y-x)\sum_{j=1}^{n} x^{j-n-1}\, y^{-j}$ dacă $x \neq 0$ şi $y \neq 0$.

Observaţie. Punctul (a) va fi folosit la 4.1.2

5. Se definesc $0! = 1$ şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n! = n(n-1)\dots 2\cdot 1$ (n *factorial*). Să se demonstreze:

(**a**) $(1-1/n)(1-2/n)\dots(1-(n-1)/n) = \dfrac{n!}{n^n}.$

(**b**) $1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}.$

6. Pentru $n \in \mathbb{Z}^+$ şi $k = 0, 1, \dots, n$, se defineşte *coeficientul binominal*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$ care se citeşte „*combinări de* n *luate câte* k”.

Să se demonstreze că:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Observaţie. Acest exerciţiu va fi utilizat la 1.5.5.

7. Fără utilizarea inducţiei matematice, să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

(**a**) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)}.$

(**b**) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2n-2k+1)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)}.$

8. Determinaţi polinomul $f(x)$ de gradul al doilea pentru care $\sum_{k=1}^{n} f(k) = n^3$ pentru orice n.

1.3. Structura de ordine a numerelor reale

Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ rezultă din următoarea *axiomă de ordine*:

Există o submulţime nevidă $\mathbb{P}$ a lui $\mathbb{R}$, care este închisă faţă de adunare şi înmulţire, astfel încât, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc exact una din următoarele relaţii:

$$x \in \mathbb{P}, -x \in \mathbb{P} \text{ sau } x = 0.$$

Ultima parte a axiomei se numeşte *proprietatea de trihotomie*. Un număr real x se numeşte *pozitiv* dacă $x \in \mathbb{P}$ şi negativ dacă $-x \in \mathbb{P}$.

1.3.1. Definiţie. Fie a şi b numere reale. Dacă $b - a \in \mathbb{P}$, scriem $a < b$ sau $b > a$ şi spunem că *a este mai mic decât b* sau că *b este mai mare decât a*.

1.3.2. Propoziție. Relația de ordine $<$ pe $\mathbb{R}$ posedă următoarele proprietăți:

(**a**) $a < b$ dacă şi numai dacă $-a > -b$ (reflexivitate).

(**b**) Dacă $a < b$ şi $b < c$, atunci $a < c$ (tranzitivitate).

(**c**) Dacă $a < b$ şi $c < d$, atunci $a + c < b + d$ (aditivitate).

(**d**) Dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci $ac < bc$ (multiplicitate).

(**e**) Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, exact una dintre propozițiile următoare este adevărată:

$$a = b, \qquad a < b, \qquad b < a \quad \text{(trihotomie)}$$

(**f**) Dacă $x \neq 0$, atunci $x^2 > 0$. În particular $1 > 0$.

Demonstrație. (**a**) $a < b \iff (-a) - (-b) = b - a \iff -a > -b$.

(**b**) Conform ipotezei, $b - a \in \mathbb{P}$ şi $c - b \in \mathbb{P}$, de unde: $c - a = (b - a) + (c - b) \in \mathbb{P}$, deci $a < c$.

(**c**) Similar cu (b).

(**d**) Deoarece $b - a, c \in \mathbb{P}$, $bc - ac = (b - a)c \in \mathbb{P}$, adică $ac < bc$.

(**e**) Aceasta rezultă aplicând proprietatea de trihotomie a lui $\mathbb{P}$ fața de $a - b$.

(**f**) Dacă $x > 0$, atunci, ținând cont că $\mathbb{P}$ este închisă față de înmulțire, $x^2 > 0$. Dacă $x < 0$, atunci $-x > 0$, astfel că $\big(\text{v. ex. } 1.2.1. \text{(c)}\big)$ $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

1.3.3. Definiție. Fie a şi b numere reale. Dacă $a < b$ sau $a = b$, scriem $a \leq b$ sau $b \geq a$ şi spunem că *a este mai mic sau egal cu b* sau că *b este mai mare sau egal cu a*. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$, definim $A^+ = \{ x \in A : x \geq 0 \}$.

De remarcat că, în urma proprietății de trihotomie:

$$a \leq b \text{ şi } b \leq a \;\Rightarrow\; a = b. \tag{1.1}$$

Inegalitatea de tip $a \leq b$ este denumită *inegalitate nestrictă*, în contrast cu inegalitatea de tip $a < b$ denumită *strictă*. Se remarcă faptul că punctele (a) $-$ (d) ale propoziției anterioare sunt valabile dacă inegalitățile stricte sunt înlocuite de inegalități nestricte.

1.3.4. Definiție. *Valoarea absolută* a unui număr real x se definește astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

De exemplu: $|0| = 0$ şi $|2| = |-2| = 2$.

1.3.5. Propoziție. *Valoarea absolută posedă proprietățile*:

(**a**) $|x| \geq 0$. (**b**) $|x| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$. (**c**) $|-x| = x$. (**d**) $-|x| \leq x \leq |x|$.

(**e**) $|xy| = |x| \cdot |y|$. (**f**) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

(**g**) $|x + y| \leq |x| + |y|$. (**h**) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ (inegalitățile triunghiului).

Demonstrație. Proprietățile (a) $-$ (e) sunt uşor de demonstrat urmărind cazurile care apar. De exemplu, în (e), dacă $x \geq 0$ şi $y \leq 0$, atunci $xy \leq 0$, de unde:

$$|xy| = -(xy) = x(-y) = |x| \cdot |y|.$$

Pentru punctul (f) utilizăm (e) şi obținem:

$$|x| = \left|\frac{x}{y}\, y\right| = \left|\frac{x}{y}\right| |y|$$

şi împărțim ambii membrii prin $|y|$.

Pentru (g) avem $\pm x \leq |x|$ şi $\pm y \leq |y|$, conform (d), de aici $\pm(x + y) \leq |x| + |y|$.

Din (g) rezultă:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|.$$

De aici $|x| - |y| \leq |x - y|$. Înlocuind pe x cu y şi utilizând (c), obținem (h).

1.3.6. Definiție. Fie S o mulțime nevidă de numere reale. *Cel mai mare element* sau *maximul lui S* este un element $\max S$ al lui S care satisface proprietatea:

$$\max S \geq s, \text{ pentru orice } s \in S.$$

Cel mai mic element sau *minimul lui S*, notat $\min S$, este definit în mod similar.

Este posibil ca o mulţime să nu admită cel mai mic element sau cel mai mare element. Existenţa lui $\max S$ şi a lui $\min S$ pentru o mulţime nevidă finită poate fi demonstrată prin inducţie matematică (ex. 1.5.2).

1. 3. 7. Definiţie. *Partea pozitivă* şi *partea negativă* a unui număr real x sunt definite prin:

$$x^+ = \max\{x, 0\} \quad \text{şi} \quad x^- = \max\{-x, 0\}.$$

Exerciţii

Demonstraţi următoarele:

1. (**a**) Dacă $ab > 0$, atunci a şi b au acelaşi semn.
(**b**) $a > 0$ dacă şi numai dacă $1/a > 0$.
(**c**) Să presupunem că fie $b, d < 0$, fie $b, d > 0$. Atunci $a/b > c/d$ dacă şi numai dacă $ad > bc$.

2. Dacă $x > 1$, atunci $x^2 > x$. Dacă $0 < x < 1$, atunci $x^2 < x$.

3. (**a**) Dacă $0 < x < y$ şi $0 < a < b$, atunci $0 < ax < by$.
(**b**) Dacă $x < y < 0$ şi $a < b < 0$, atunci $0 < by < ax$.
(**c**) Fie $x, y > 0$. Atunci $x < y$ dacă şi numai dacă $x^2 < y^2$.

4. Dacă avem $0 < x < y$ sau $x < y < 0$, atunci $1/y < 1/x$.

5. Dacă $-1 < x < y$ sau $x < y < -1$, atunci $x/(x+1) < y/(y+1)$. Dar dacă $x < -1 < y$?

6. Dacă $0 < x < y$ şi $n \in \mathbb{N}$, atunci

(**a**) $0 < y^n - x^n \leq n(y-x)y^{n-1}$, (**b**) $\frac{ny+1}{nx+1} < \frac{(n+1)y+1}{(n+1)x+1}$.

7. Dacă $x > 1, m, n \in \mathbb{N}$ şi $\dfrac{x-1}{x} < \dfrac{m}{n} < 1$, atunci $n > x$.

8. Dacă $a < b$ şi $0 < t < 1$, atunci $a < ta + (1-t)b < b$. În particular, $a < (a+b)/2 < b$.

9. $x^2 + y^2 + axy \geq 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $|a| \leq 2$.

10. Dacă $a \leq b + x$ pentru orice $x > 0$, atunci $a \leq b$.

11. Dacă $0 < a \leq bx$ pentru orice $x > 1$, atunci $a \leq b$.

12. Dacă $a/x \leq x + 1$ pentru orice $x > 0$, atunci $a \leq 0$.

13. Pentru orice $x, y, z, w \in \mathbb{R}$,
(**a**) $2xy \leq x^2 + y^2$. (**b**) $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$. (**c**) $(xy + zw)^2 \leq (x^2 + z^2)(y^2 + w^2)$.
(**d**) $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

14. Dacă $x, a > 0$, atunci $x + a^2/x \geq 2a$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = a$.

15. (**a**) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$. (**b**) $|x - L| < \varepsilon$ dacă şi numai dacă $L - \varepsilon < x < L + \varepsilon$.

16. Fie $S, T \subseteq \mathbb{R}$ mulţimi finite şi nevide. Definim $-S := \{-s : s \in S\}$. Atunci:
(**a**) $\max(-S) = -\min S$. (**b**) $\min(-S) = -\max S$. (**c**) $\max(S \cup T) = \max\{\max S, \max T\}$.
(**d**) $\min(S \cup T) = \min\{\min S, \min T\}$.

17. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,
(**a**) $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$, $x = x^+ + x^-$ şi $|x| = x^+ + x^-$.
(**b**) $x^+ = (|x| + x)/2$ şi $x^- = (|x| - x)/2$.
(**c**) $x = y - z$ şi $|x| = y + z$ implică $y = x^+$ şi $z = x^-$.
(**d**) $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$ şi $(x+y)^- \leq x^- + y^-$.
(**e**) $(x-y)^- \leq y$ dacă $x, y \geq 0$.

18. Dacă $a \leq x \leq b$, atunci $|x| \leq \max\{|a|, |b|\}$.

19. (**a**) $\max\{x, y\} = (x + y + |x - y|)/2$.
(**b**) $\min\{x, y\} = (x + y - |x - y|)/2$.

20. (**a**) $\max\{a, b, c\} = \dfrac{1}{4}\left(a + b + 2c + |a - b| + \big|a + b - 2c + |a - b|\big|\right)$.
(**b**) $\min\{a, b, c\} = \frac{1}{4}\left(a + b + 2c - |a - b| - \big|a + b - 2c - |a - b|\big|\right)$.

21. Fie $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, unde $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Fie $1 \leq k < n$ şi notăm $S_1, S_2, \ldots, S_m$ mulţimile obţinute prin îndepărtarea a exact k elemente din S, unde $m = \binom{n}{k}$ este coeficientul binominal (vezi Teorema 1.5.5). Atunci

$$\max\{\min S_1, \min S_2, \ldots, \min S_m\} = a_{k+1}.$$

1.4. Completitudinea multimii R

Un sistem $(\mathbb{F}, +, \cdot, <)$ cu proprietăţile algebrice şi de ordine descrise în secţiunile 1.2 şi 1.3 este numit *corp ordonat*. Conform exerciţiului 1.2.2, $\mathbb{Q}$ este un corp ordonat, cu operaţiile algebrice şi de ordine preluate de la $\mathbb{R}$.
Acelaşi lucru este valabil şi pentru mulţimea:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{x + \sqrt{2}\,y : \ x, y \in \mathbb{Q}\}$$

(v. ex. 19). Aceasta sugerează faptul că există o infinitate de sub-corpuri ordonate ale lui $\mathbb{R}$. Proprietatea care distinge $\mathbb{R}$ de alte corpuri ordonate se numeşte *completitudine* şi care va fi descrisă în această secţiune.

1.4.1. Definiţie. O submulţime nevidă A a unui câmp ordonat $\mathbb{F}$ se numeşte *mărginită superior* dacă există un element $u \in \mathbb{F}$, numit *marginea superioară* a lui A, astfel încât $a \leq u$, pentru orice $a \in A$.
Noțiunile de *mărginire inferioară* și *margine inferioară* sunt definite în mod analog.
Spunem că mulțimea A este *mărginită* dacă este mărginită și inferior și superior.
Dacă o mulțime nu este mărginită superior sau inferior spunem că este *nemărginită*.

Submulţimile $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Z}$ ale lui $\mathbb{R}$ nu sunt mărginite nici inferior, nici superior; $\mathbb{N}$ este mărginită inferior, dar nu și superior.
Mulțimea $\{n/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită superior de 1 și inferior de $1/2$.

1.4.2. Definiție. Fie A o mulțime nevidă a unui corp ordonat $\mathbb{F}$. O margine superioară u_0 a lui A cu proprietatea $u_0 \leq u$ pentru orice margine superioară u a lui A se numește *cea mai mică margine superioară* sau *supremum* al lui A și este notat $\sup A$.
O margine inferioară l_0 a lui A cu proprietatea $l_0 \leq l$ pentru orice margine superioară u a lui A se numește *cea mai mare margine superioară* sau *infimum* al lui A și este notat $\inf A$.
Dacă $\sup A \in A$, atunci sup A este numită *maximul lui A*. Dacă $\inf A \in A$, atunci inf A se numește *minimul lui A*.

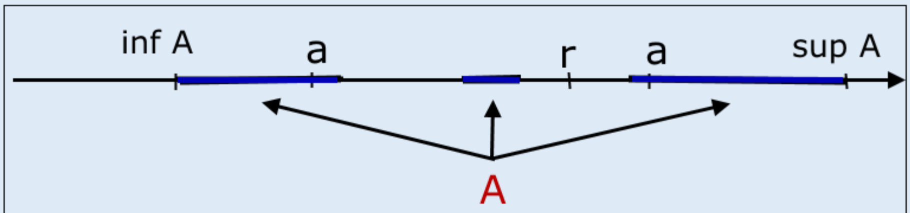


Fig. 1.1. Marginea superioară (sup A) şi marginea inferioară (inf A) a mulţimii A.

Din (1.1) rezultă că supremumul sau infimumul unei mulțimi, dacă există, este unic.
Nu orice submulţime nevidă şi mărginită a unui corp ordonat admite infimum sau supremum.
De exemplu, deoarece $\sqrt{2}$ nu este rațional (vezi mai jos în 1.4.11), mulțimea mărginită $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ nu posedă nici infimum, nici supremum.
Următoarea propoziție va fi utilizată frecvent în studiile privind supremum și infimum.

1.4.3. Proprietatea de aproximare. Fie A o submulțime nevidă a unui corp ordonat $\mathbb{K}$.
(**a**) Dacă $\sup A$ există, atunci pentru orice r cu $r < \sup A$ există un $a \in A$ astfel încât $r < a \leq \sup A$.
(**b**) Dacă $\inf A$ există, atunci pentru orice r cu $\inf A < r$ există un $a \in A$ astfel încât $\inf A \leq a < r$.

Demonstrație. Dacă $r < \sup A$, atunci r nu poate fi majorant al lui A, deci există un $a \in A$ cu $r < a$.
La fel se demonstrează punctul (b).

În cele ce urmează se va formula proprietatea care diferenţiază mulţimea numerelor reale de alte corpuri ordonate.

Orice submulțime nevidă și majorată a lui $\mathbb{R}$ posedă margine superioară.

Această axiomă este cunoscută ca *proprietatea de completitudine a lui* $\mathbb{R}$ și reprezintă o componentă fundamentală pentru formularea teoriei riguroase a limitelor.
Din proprietatea de completitudine se poate deduce (Exercițiul 1)o proprietate similară simetrică:

Orice submulțime nevidă și majorată a lui $\mathbb{R}$ posedă margine inferioară.

Deci mulțimea numerelor reale poate fi descrisă ca fiind un *corp ordonat și complet*.
Se poate demonstră că orice altă mulțime care posedă această proprietate este izomorfă cu $\mathbb{R}$.
Următoarea consecință a proprietății de completitudine este utilă în determinarea marginii superioare sau inferioare a diverse mulțimi. Aceasta susține că multiplii naturali ai unui număr real pot fi oricât de mari:

1.4.4. Principiul lui Arhimede. *Pentru orice numere reale* a și b *cu* a > 0, *există cel puțin un* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $na > b$.

Demonstrație. Presupunem că $na < b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Mulțimea $S = \{ na : \ n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită superior și deci posedă margine superioară și fie aceasta u. Deoarece $u - a < u$, proprietatea de aproximare a marginii superioare implică faptul că $u - a < na$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$. Dar $u < (n+1)a \in S$, ceea ce contrazice faptul că u este margine superioară a lui S.

1.4.5. Exemplu. Fie

$$A = \left\{(-1)^n \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots\right\}.$$

Deoarece A este mărginită superior de 1 şi inferior de -1, $-1 \leq \inf A \leq \sup A$. Fie $0 < r < 1$. Conform principiului lui ARHIMEDE, putem alege un întreg par n astfel încât $n > r/(1-r)$. Atunci $r < n/(n+1) \in A$, care arată că r nu poate fi margine superioară pentru A. Deci $\sup A = 1$. În mod similar, $\inf A = -1$.

1.4.6. Principiul bunei ordonări. Orice submulţime nevidă A a lui $\mathbb{N}$ are un cel mai mic element.
Demonstrație. Deoarece A este mărginită inferior prin 1, aceasta admite o margine inferioară l. Teorema va fi demonstrată dacă vom arăta că $l \in A$. Presupunem prin absurd că $l \notin A$. Conform proprietăţii de aproximare a celui mai mic element, există $a \in A$ astfel încât $l < a < l + 1$. Să alegem un număr real r cu proprietatea $l < r < a$, de exemplu $r = (a+l)/2$. Din nou conform proprietăţii de aproximare, există un $a' \in A$ astfel încât $l < a' < r$. Acum avem $l < a' < l + 1$, ceea ce implică faptul că $a - a'$ este un număr întreg situat strict între 0 şi 1. Cum însă aceasta este imposibil, rezultă că $l \in A$.

Observație. Partea „intuitivă” de la sfârşitul demonstraţiei va fi eliminată printr-o demonstraţie riguroasă care poate fi obţinută printr-o definire abstractă a mulţimii $\mathbb{N}$ din paragraful 1.5.

1.4.7. Funcţia „parte întreagă”. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un întreg unic $[x]$ astfel încât $x - 1 < [x] \leq x$.
Demonstrație. Unicitatea este clară. Pentru a demonstra existenţa, să aplicăm de două ori principiul lui ARHIMEDE: mai întâi pentru a obţine un întreg k astfel încât $x + k \geq 1$ şi apoi să concluzionăm că mulţimea $A \coloneqq \{ n \in \mathbb{N} : n > x + k \}$ este nevidă. Conform principiului bunei ordonări, A admite un cel mai mic element a. Deoarece $1 \leq x + k < a$, $a - 1$ este un număr natural. Deoarece $a - 1 < a$, $a - 1$ nu poate fi element al lui A astfel că $x + k \geq a - 1$. Deci $x - 1 < a - 1 - k \leq x$, de unde rezultă că întregul $[x] \coloneqq a - 1 - k$ posedă proprietatea cerută.

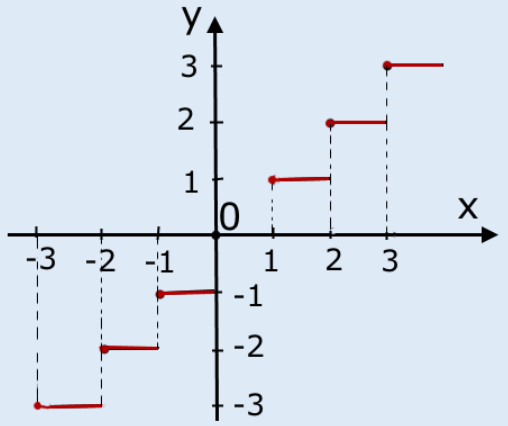


Fig. 1.2 Funcţia "parte întreagă"

1.5. Inductia matematica

În această secţiune vom furniza o caracterizare abstractă a mulţimii numerelor naturale, care va conduce către principiul inducţiei matematice.

$\mathbf{1.5.1.}$ **Definiţie.** O mulţime S de numere reale se numeşte *inductivă* dacă:

- $1 \in S$,
- $x \in S \;\Rightarrow\; x+1 \in S$.

Atunci mulţimea $\mathbb{N}$ a *numerelor naturale* este definită ca intersecţia tuturor submulţimilor inductive ale lui $\mathbb{R}$. Mulţimile $(a,+\infty)$ şi $(a,+\infty) \cap \mathbb{Q}$ sunt în mod evident inductive. Mai mult, şi mulţimea $\mathbb{N}$ este inductivă. Într-adevăr, deoarece 1 este comun tuturor mulţimilor inductive, $1 \in \mathbb{N}$ şi dacă n este comun tuturor mulţimilor inductive, la fel va fi şi $n+1$. Aşadar, putem carcateriza $\mathbb{N}$ ca fiind cea mai mică dintre mulţimile inductive (în sensul incluziunii). *Principiul inducţiei matematice* rezultă imediat din caracterizarea:

$\mathbf{1.5.2.}$ **Principiul inducţiei matematice.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $P(n)$ o propoziţie depinzând de n. Dacă:

(**a**) $P(1)$ este adevărată,

(**b**) $P(n+1)$ este adevărată atunci când $P(n)$ este adevărată.

Atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice n.

Demonstraţie. Fie S mulţimea acelor $n \in \mathbb{N}$ pentru care $P(n)$ este adevărată. Atunci (**a**) şi (**b**) implică faptul că S este inductivă şi de aici, ca submulţime a lui $\mathbb{N}$, trebuie să fie de fapt egală cu $\mathbb{N}$.

În cadrul aplicaţiei $\mathbf{1.5.2}$, partea (**a**) se numeşte *pasul iniţial*, iar partea (**b**) *pasul de inducţie*. Presupunerea că $P(n)$ este adevărată se numeşte *ipoteza de inducţie*.

Principiul inducţiei matematice poate fi ilustrat ca "principiul dominoului": Dacă piesele de domino sunt aşezate vertical astfel încât căderea piesei n cauzează căderea piesei $n+1$, atunci, dacă prima piesă este mişcată, vor cădea toate piesele.

044

Exerciţii

1. Fie $0 < a < x_1\,,\, y_1 < b := a+1$ şi definim:

$$x_{n+1} = a + \sqrt{|x_n - a|} \text{ și } y_{n+1} = b - \sqrt{|b - y_n|}.$$
Demonstrați că $a < x_n < x_{n+1}$ și $a < y_{n+1} < y_n < b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Observație. Acest exercițiu va fi utilizat în **2.2.3**.
2. Utilizați metoda inducției pentru a demonstra că o mulțime nevidă finită admite un maxim și un minim.
3. Demonstrați prin inducție că:
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{pentru orice } n \geq 1.$$
Observație. Acest exercițiu va fi folosit în **6.4.8**.
4. Utilizând metoda inducției, stabiliți următoarele formule:

(**a**) $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2.$ (**b**) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$ (**c**) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = [n(n+1)/2]^2.$

(**d**) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = n(4n^2-1)2.$ (**e**) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1).$ (**f**) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n}.$

(**g**) $\sum_{k=1}^{n} (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = n^4.$ (**h**) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k + \sqrt{k(k-1)} - 1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = n\sqrt{n}.$

5. Utilizați metodele de la 1.5.4 pentru derivare și obțineți formula pentru $\sum_{k=1}^{n} (5k-4)^2.$
6. Utilizați formule cunoscute pentru a calcula:
(**a**) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 999 \cdot 1000.$
(**b**) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 999 \cdot 1001.$
(**c**) $1 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 11 + \cdots + 1001 \cdot 1003.$
7. Utilizați principiul inducției matematice pentru a demonstra următoarea propoziție:
Fie $\mathrm{n}_0 \in \mathbb{Z}$ și fie $P(n)$ o propoziție depinzând de întregii $n \geq n_0$ astfel încât:
(a) $P(n_0)$ este adevărată,
(b) dacă $n \geq n_0$ și $P(n)$ este adevărată, atunci $P(n+1)$ este adevărată.
Atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.
8. Utilizați varianta inducției matematice de la ex. 7 pentru a verifica următoarele egalități.
(Pentru (e) utilizați $(1 + 1/n)^n > 2,$ o consecință directă a teoremei binomiale.)
(**a**) $2n + 1 < 2^n,\ n \geq 3.$ (**b**) $n^2 < 2^n,\ n \geq 5.$ (**c**) $2^n < n!,\ n \geq 4.$
(**d**) $3^n < n!,\ n \geq 7.$ (**e**) $2^n n! < n^n,\ n \geq 6.$ (**f**) $8^n n! < (2n)!,\ n \geq 6.$
9. Utilizați varianta inducției matematice de la ex. 7 pentru a demonstra că $n < \ln(n!),\ n \geq 6.$
10. Demonstrați *inegalitatea lui* ***Bernoulli***: $(1+x)^n \geq 1 + nx,\ n \in \mathbb{N},\ x \geq -1.$
11. Demonstrați următoarea variantă a principiului inducției matematice:
Fie $n_0 \in \mathbb{Z}$ și fie $P(n)$ o propoziție care depinde de întregii $n \geq n_0$ astfel încât:
(a) $P(n_0)$ este adevărată,
(b) $P(n+1)$ este adevărată dacă $P(j)$ este adevărată pentru orice $n_0 \leq j \leq n$.
Atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.
12.

1.6. Spatiul euclidian

Mulțimea numerelor reale poate fi utilizată la construcția altor mulțimi, cum ar fi spațiul euclidian n-dimensional și mulțimea numerelor complexe.

Pentru un $n \in \mathbb{N}$ notăm prin $\mathbb{R}^n$ mulțimea tuturor n-uplurilor $x := (x_1, x_2, \dots x_n)$, unde $x_i \in \mathbb{R}$. Fiecare n-uplu este numit *punct* sau *vector*, depinzând de context. Această distincție dintre noțiunea de punct și cea de vector este necesară în fizică și în geometrie.

Mulțimea $\mathbb{R}^n$ posedă o structură algebrică definită astfel:
Fie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ și $t \in \mathbb{R}$.
Operațiile de *adunare* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ și *înmulțire cu un scalar* $t\boldsymbol{x}$ din $\mathbb{R}^n$ sunt definite astfel:
$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ și
$t\boldsymbol{x} = \mathrm{t}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n) = (t\, x_1 + t\, x_2 + \cdots + t\, x_n).$

Definim de asemenea:

$$-\boldsymbol{x} := (-x_1, -x_2, \dots - x_n) \qquad \text{şi } 0 := (0, 0, \dots, 0).$$

Următoarea teoremă susţine că $\mathbb{R}^n$ este *spaţiu vectorial* cu operaţiile definite anterior (v. Anexa 1). Demonstraţia teoremei următoare este lăsată pe seama cititorului:

1.6.1. Teoremă. Adunarea şi înmulţirea cu un scalar, definite pe $\mathbb{R}^n$, posedă următoarele proprietăţi:

- asociativitatea adunării: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;
- comutativitatea adunării: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;
- existenţa elementului neutru pentru adunare: $\boldsymbol{x}+0 = \boldsymbol{x}$;
- existenţa elementului invers pentru adunare: $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = 0$;
- asociativitatea înmulţirii cu un scalar: $(st)\boldsymbol{x} = s(t\boldsymbol{x})$;
- distributivitatea unui scalar faţă de adunarea vectorilor: $s(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = s\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{y}$;
- distributivitatea unui vector faţă de adunarea scalarilor: $(s+t)\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{x}+t\,\boldsymbol{x}$;
- existenţa elementului neutru faţă de înmulţirea cu un scalar: $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

1.6.2. Definiţie. Fie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ şi $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots y_n)$. *Produsul scalar euclidian* $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ al lui $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$ şi *norma euclidiană* $\|\boldsymbol{x}\|_2$ a lui $\boldsymbol{x}$ sunt definite prin:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j \quad \text{şi} \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\right)^{1/2} = \sqrt{x\cdot x}.$$

Mulţimea $\mathbb{R}^n$, împreună cu structura de spaţiu vectorial şi produsul scalar, definite anterior, formează ceea ce se numeşte *spaţiu euclidian* n*-dimensional.* Structura de spaţiu euclidian permite definirea noţiunilor de: linie, plan, lungime, perpendicularitate, unghi între doi vectori etc.

1.6.3. Teoremă. Produsul scalar pe $\mathbb{R}^n$ posedă proprietăţile:

(a) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2$;

(b) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ (comutativitate);

(c) $t(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = (t\,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot(t\,\boldsymbol{y})$ (asociativitate);

(d) $\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})$ (aditivitate);

(e) $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \le \|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2$ (inegalitatea **Cauchy-Schwartz**).

Demonstraţie. Proprietăţile (a), (b) sunt immediate, iar (c) şi (d) rezultă din calculele:

2. Siruri numerice

2.1. Limita unui sir

Ca o primă definiţie, *un şir într-o mulţime E* este o funcţie definită pe $\mathbb{N}$ cu valori în E.
Totuşi este mai ilustrativ să gândim un şir ca o listă ordonată infinită de elemente din E, listă ce va putea fi scrisă, de exemplu, astfel:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

sau prescurtat prin $\{a_n\}_1^\infty$ sau simplu prin $\{a_n\}$.
Un şir începe de regulă cu indicele 1 sau uneori cu 0.

De cele mai multe cazuri, în prima parte a aceastei lucrări va fi considerat $E = \mathbb{R}$.

Şirurile pot fi definite printr-o *formulă*, ca de exemplu $a_n = (-1)^n$ sau prin *recurenţă*, cum ar fi *şirul lui* **Fibonacci**, definit prin:

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{şi} \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \ge 1$$

(vezi Exerciţiul 1.5.13.)

Următoarea notaţie poate fi utilă. Spunem că o proprietate *P* a unui şir $\{a_n\}$ are loc pentru un *n* suficient de mare dacă există un index *N* astfel încât a_n posedă proprietatea *P* pentru orice $n \ge N$. De exemplu, în cazul principiului lui **Arhimede**, şirul $\{1/n\}$ este pentru un *n* suficient de mare mai mic decât 0,001. Astfel, considerând şirul $a_n = n^2 + 100\,(-1)^n$, se poate demonstra că pentru un *n* suficient de mare: $a_n < a_{n+1}$.
Convergenţa unui şir de numere *a* exprimă ideea că, pentru un *n* suficient de mare, termenii şirului se apropie cât dorim de mult de acel *a*.

2.1.1. Definiţie. Spunem că un şir $\{a_n\}$ în $\mathbb{R}$ *converge către un număr real a* şi scriem:

$$a_n \to a \text{ sau } \lim_{n\to+\infty} a_n = \text{a},$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $N \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ (a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon), \text{ pentru orice } n \geq N.$$

Dacă nu există un astfel de număr real a, spunem că şirul este *divergent*.

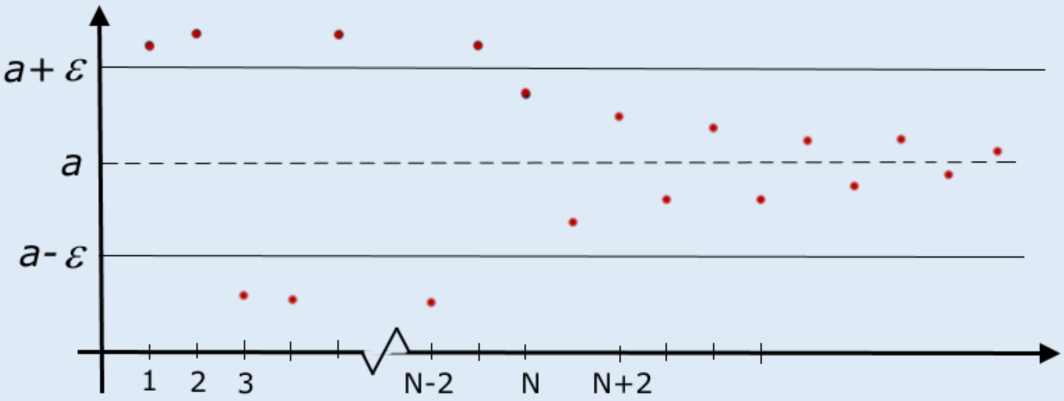


Fig. 2.1. Convergenţa unui şir la a

Rezultă imediat din definiţie că $a_n \to a$ dacă şi numai dacă termenii şirului, începând cu un n suficient de mare, sunt conţinuţi în orice interval deschis care îl conţine pe a. De asemenea, definiţia implică faptul că $a_n \to a$ dacă şi numai dacă $|a_n - a| \to 0$.

Limita unui şir, dacă există, este unică. Într-adevăr, dacă $a_n \to a$ şi $a_n \to b$, atunci, din inegalitatea triunghiului, $|a - b| \leq |a_n - a\ | + |b - a_n| \to 0,$ de unde $a = b$.

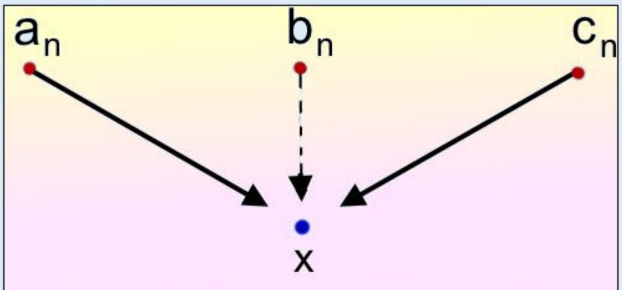


Fig. 2.2. Teorema ''cleştelui''

2.2 Siruri monotone

2.3. Subsiruri si siruri Cauchy

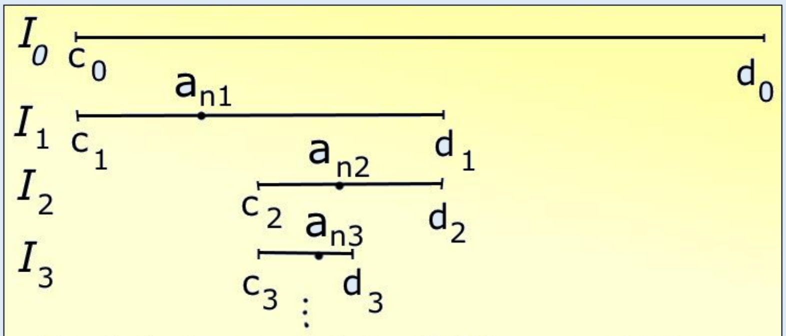


Fig. 2.3. Proces de înjumătăţire a unui interval

2.4. Limita inferioara si limita superioara

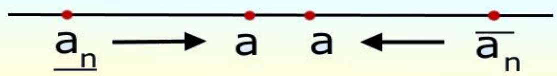


Fig. 2.4. $\underline{a}=\lim\inf_n a_n$ şi $\bar{a}=\lim\sup_n a_n$

3. Limita si continuitate pe R

Limita unei functii

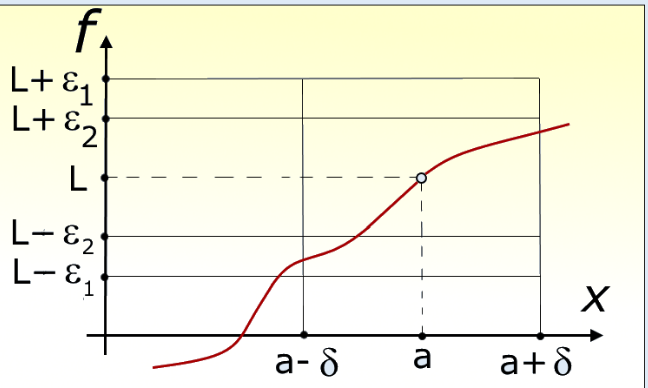


Fig. 3.1. δ influenţează ε_1, nu şi ε_2.

Limita inferioara si limita superioara

Continuitate a unei functii

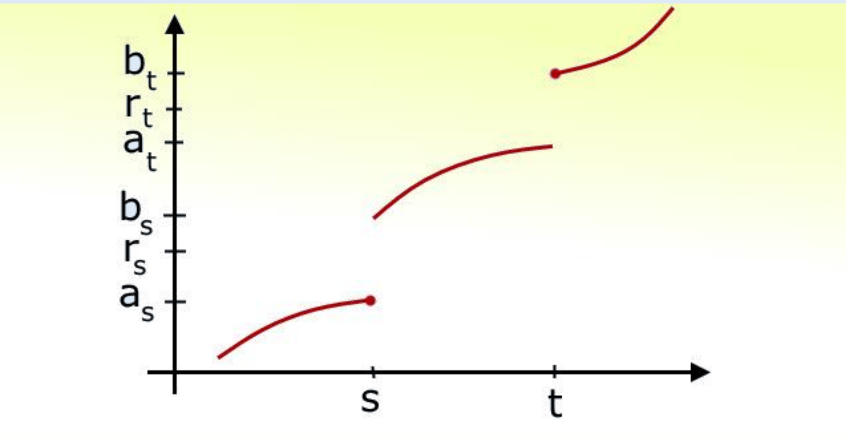


Fig. 3.3. Corespondenţă biunivocă între $t \in D$ şi $r_t \in \mathbb{Q}$.

Proprietatile functiilor continue

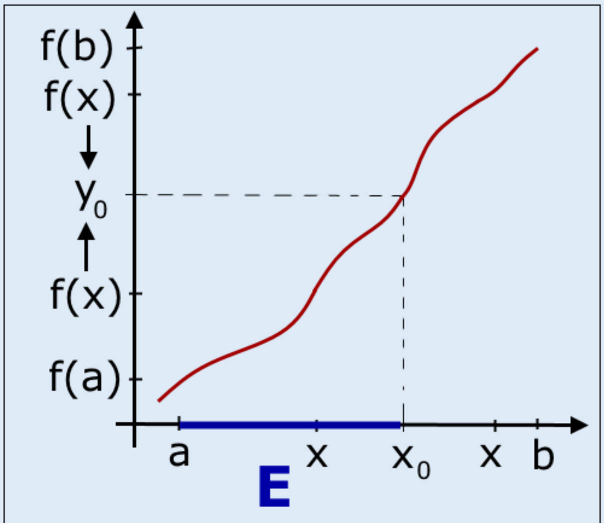


Fig. 3.4. $y_0 = f(x_0)$.

Continuitate uniforma

Diferentiala pe R

Definitia derivatei

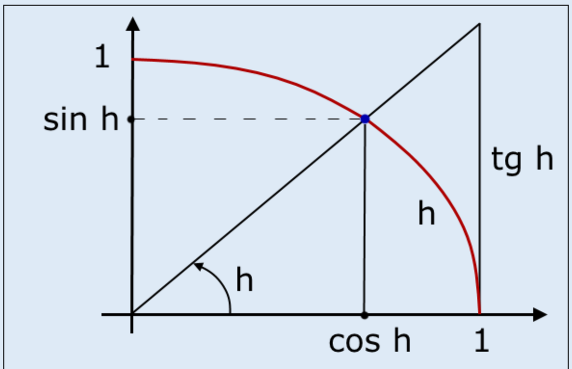


Fig. 4.1. sin h < h < tg h .

Teorema valorii medii

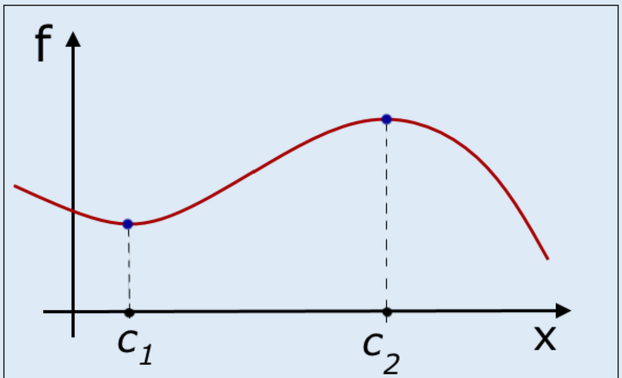


Fig. 4.2. Extreme locale ale lui f.

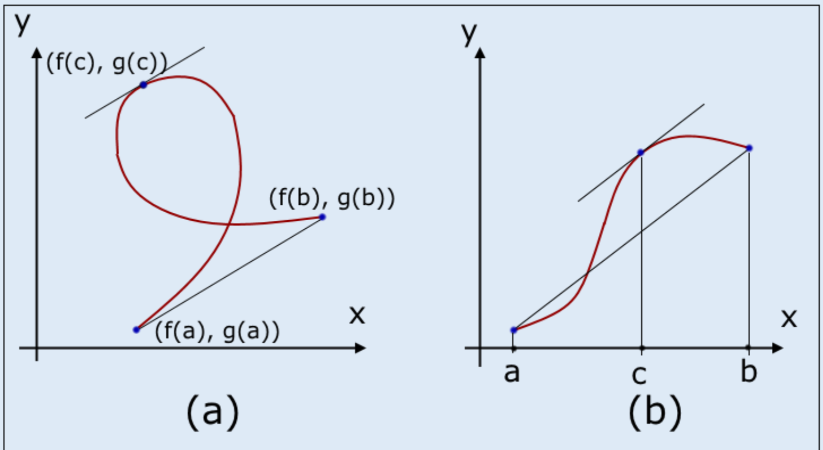


Fig. 4.3. (a) Teorema lui Cauchy (b) Teorema valorii medii.

Functii convexe

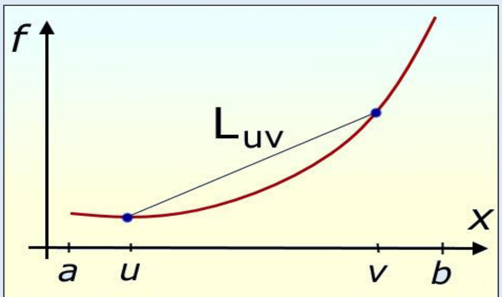


Fig. 4.4. Funcţie convexă

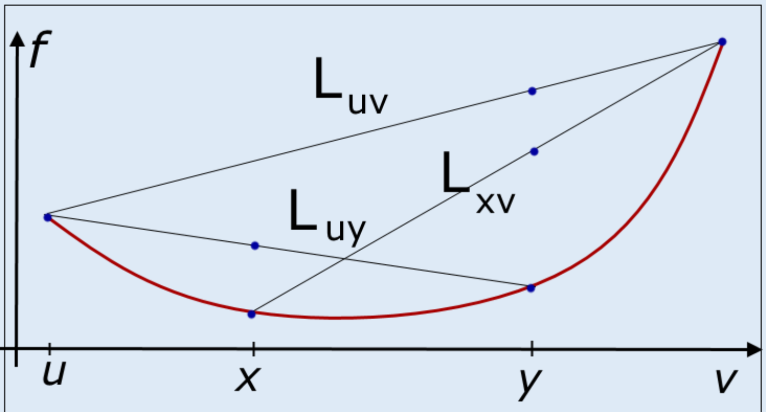


Fig. 4.5. Inegalităţi cu funcţii convexe

Functia inversa

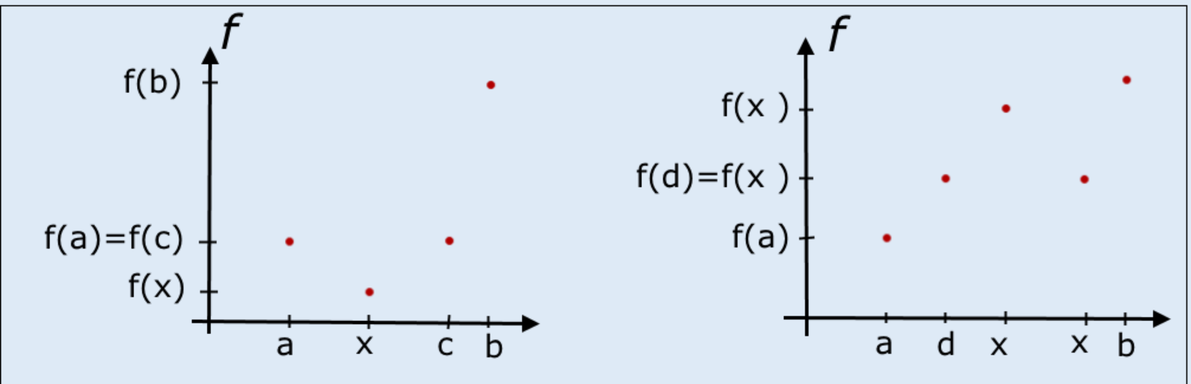


Fig. 4.6. *f(x)<f(a)* şi $f(x_1) > f(x_2)$ nu respectă ipoteza bijectivităţii.

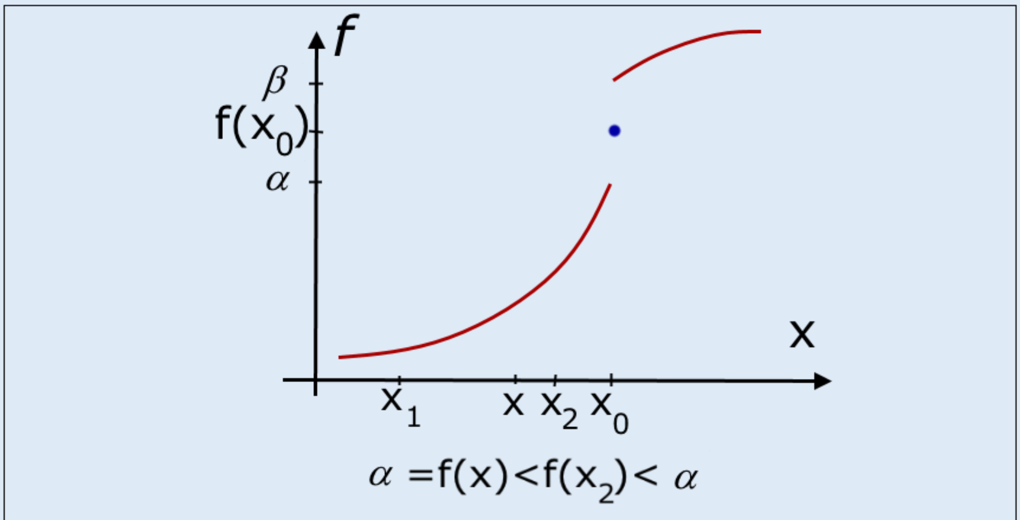


Fig. 4.7. Teorema valorilor medii implică proprietatea de continuitate.

Regula lui L'Hospital

Teorema lui Taylor

Metoda lui Newton

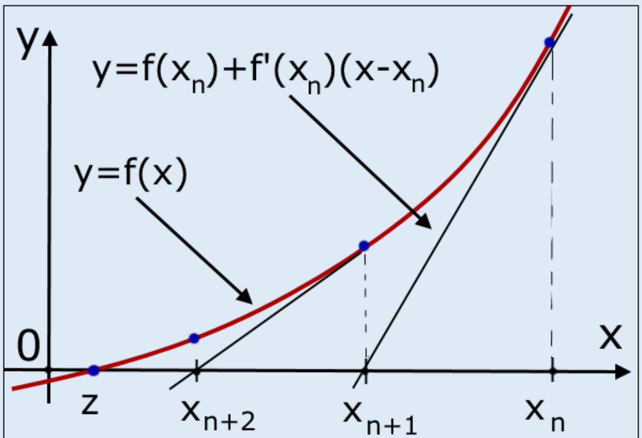


Fig. 4.8. Metoda lui Newton

Tabelul 4.1. Metoda lui Newton pentru $e^x+x-2=0$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	.5378828	.4456167	.4428567	.4428544
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
1.7182818	.2502604	.0070696	.0000059	.0000000
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	3.9866142	2.9686340	1.9701667	1.0961884
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
151.4131591	55.8587993	20.4339472	7.1420387	2.0889256

Integrala Riemann

Integrala Darboux-Riemann

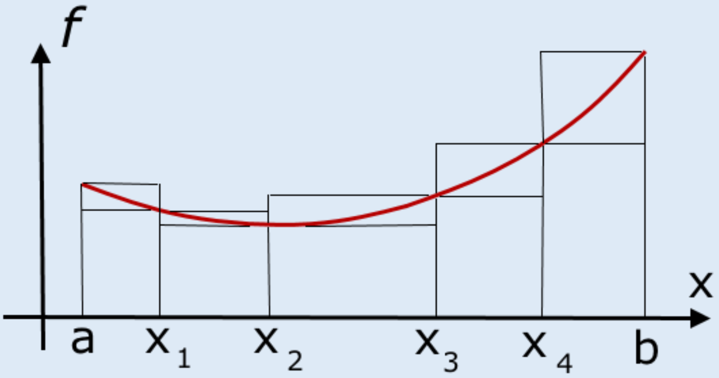


Fig. 5.1. Suma inferioară şi superioară a lui f

Proprietatile integralei

Aproximarea integralei

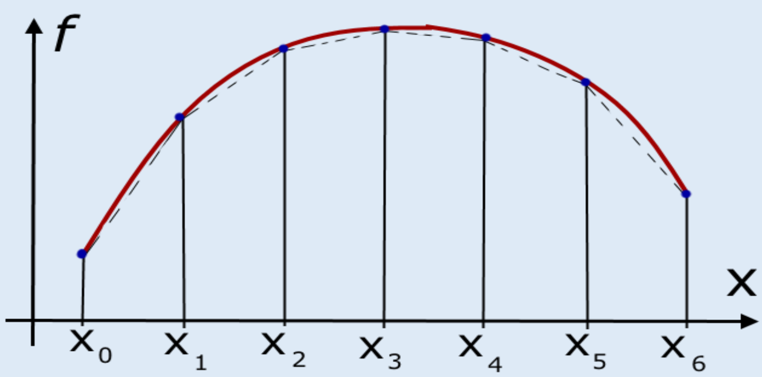


Fig. 5.7. Aproximare prin metoda trapezului.

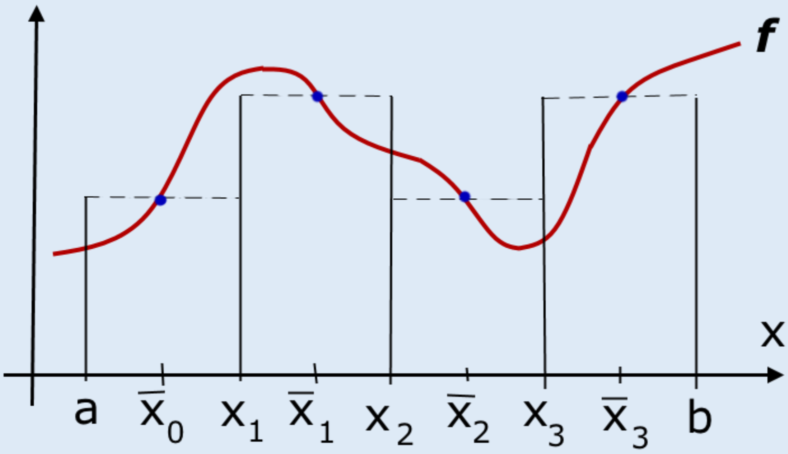


Fig. 5.8. Aproximare prin metoda punctului median.

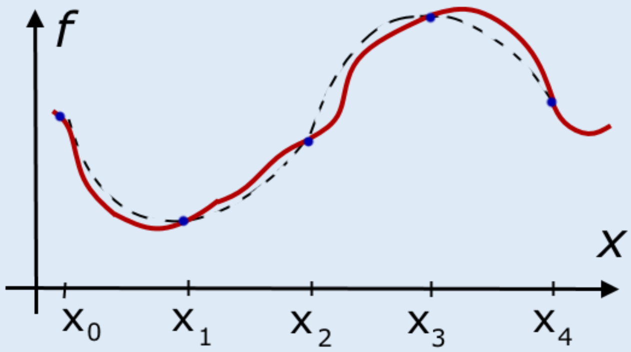


Fig. 5.9. Aproximare prin metoda lui Simpson.

Formula lui Stirling

Forma integrala a teoremei valorii medii

Aproximarea unei integrale

Tabel 5.3. O comparaţie a celor două metode

Metoda	$n = 4$	$n = 8$
Regula punctului la stânga	0,1836233710	0,0927753302
Regula trapezului	-0,0038766290	-0,0009746698
Regula punctului mijlociu	0,0019272893	0,0004866265
Regula lui Simpson	-0,0001067877	-0,00000735011

Integrale improprii

Observatii privind integrala Riemann

Functii de variatie marginita

Siruri si serii de functii

Partea II. Functii de mai multe variabile

Spatii metrice

Diferentiala in spatiul n-dimensional

Masura Lebesgue

Integrala Lebesgue

Curbe si suprafete in spatiul n-dimensional

Integrale de suprafata

Anexa

Simbol	Denumire	Paragraf

Lista simbolurilor

!! ‼ ... … :: ∷ := ≔ \above ┴ \acute ´ \aleph ℵ \alpha α
\Alpha Α \amalg ∐ \angle ∠ \aoint ∳ \approx ≈ \asmash ⬆
\ast ∗ \asymp ≍ \atop ¦ \bar ¯ \Bar ˭ \because ∵ \begin 〖 \below
\bet \beta \Beta \beth \bigcap \bigcup \bigodot \bigoplus \bigotimes
\bigsqcup \bigvee \bigwedge \binomial \bot \bowtie \box \boxdot
\boxminus \boxplus \bra \break \breve \bullet \cap \cases \cbrt \cdot \cdots
\check \chi \Chi \circ \close \clubsuit \coint \cong \coprod \cup \dalet \daleth \dashv \dd \Dd
\ddddot \dddot \ddot \ddots \defeq \degc \degf \degree \delta \Delta \Deltaeq \diamond
\diamondsuit \div \dot \doteq \dots \doublea \doubleA … \doublez \doubleZ \downarrow
\Downarrow \dsmash \ee \ell \emptyset \emsp \end \ensp \epsilon \Epsilon \eqarray \equiv \eta
\Eta \exists \forall \fraktura \frakturA …. \frakturz \frakturZ \frown \funcapply \G \Gamma
\Gamma \ge \geq \gets \gg \gimel \grave \hairsp \hat \hbar \heartsuit \hookleftarrow
\hookrightarrow \hphantom \hsmash \hvec \identitymatrix \ii \iiiint \iiint \iint \int \Im \imath \in
\inc \infty \int \integral \iota \Iota \itimes \j \jj \jmath \kappa \Kappa \ket \lambda \Lambda
\langle \lbbrack \lbrace \lbrack \lceil \ldiv \ldivide \ldots \le \left \leftarrow \Leftarrow
\leftharpoondown \leftharpoonup \leftrightarrow \Leftrightarrow \leq \lfloor \lhvec \limit \ll \lmoust
\Longleftarrow \Longleftrightarrow \Longrightarrow \lrhrar \lvec \mapsto \matrix \medsp \mid
\middle \models \mp \mu \Mu \nabla \nbsp \ne \nearrow \neg \neq \ni \norm \notcontain
\notelement \notin \nu \Nu \nwarrow \o \O \odot \of \oiiint \oiint \oint \omega \Omega \ominus
\open \oplus \otimes \overbar \overbrace \overbracket \overline \overparen \overshell \parallel
\partial \perp \phantom \phi \Phi \pi \Pi \pm \pmatrix \pppprime \ppprime \pprime \prec \preceq
\prime \prod \propto \psi \Psi \qdrt \quadratic \rangle \Rangle \ratio \rbrace \rbrack \rceil \rdots
\Re \rect \rfloor \rho \Rho \rhvec \right \rightarrow \Rightarrow \rightharpoondown
\rightharpoonup \rmoust \root \scripta \scriptA … \scriptz \scriptZ \sdiv \sdivide \searrow \setminus
\sigma \Sigma \sim \simeq \smash \smile \spadesuit \sqcap \sqcup \sqrt \sqsubseteq \sqsupseteq
\star \subset \subseteq \succ \succeq \sum \superset \superseteq \swarrow \tau \Tau \therefore
\theta \Theta \thicksp \thinsp \tilde \times \to \top \tvec \ubar \Ubar \underbar \underbrace
\underbracket \underline \underparen \uparrow \Uparrow \uplus \upsilon \Upsilon \varepsilon

\varphi \varpi \varrho \varsigma \vartheta \vbar \vdash \vdots \vec \vee \vert \Vert \Vmatrix \vphantom \vthicksp \wedge \wp \wr \xi \Xi \zeta \Zeta \zwnj \zwsp ~= +- -+ << <= -> >= >>

Culoarea paginii: 222, 234, 246

$$E = mc^2 \tag{1}$$