NICOLAE COMAN

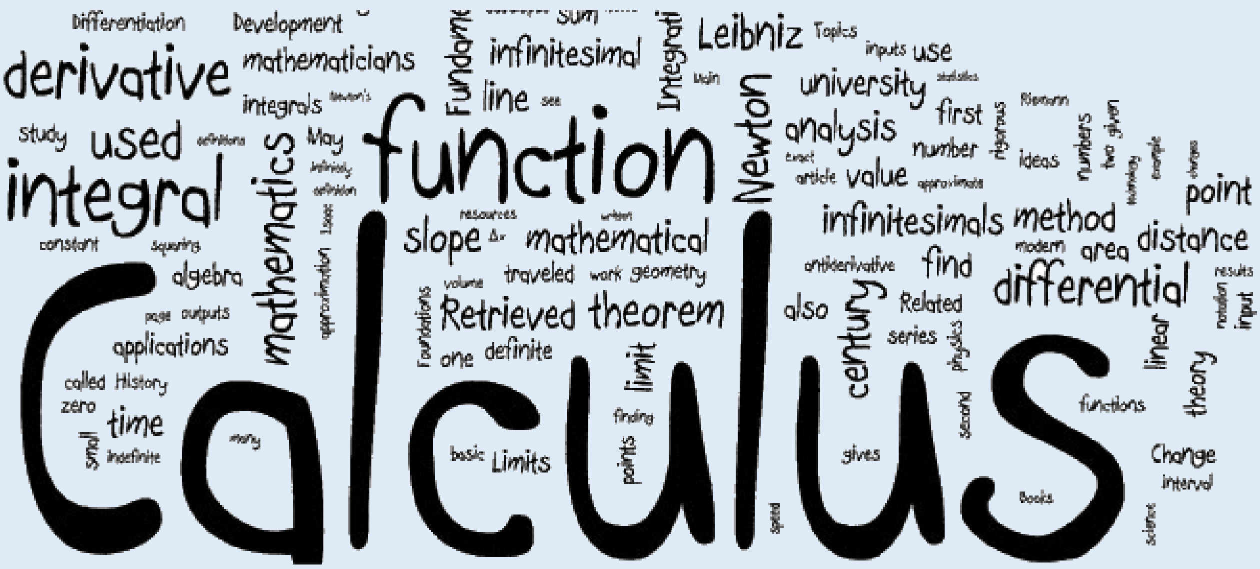
[facebook.com/nicolae.coman]

[ComanSite]

[Wikipedia User Page]

Analiză matematică

prin exerciţii şi probleme



Cuprins

V. CALCUL VARIATIONAL

VI. ANALIZA MATEMATICA ABSTRACTA

VII. DIVERSE

VII. ANEXE

CUPRINS

Preliminarii

Mulţimi, relaţii, funcţii

Se numeşte *propoziţie* un enunţ despre care se poate spune fie că este adevărat, fie fals, însă nu ambele variante simultan. Se notează propoziţiile cu litere mici: $p, q, r, \dots$. Unei propoziţii *p* i se atribuie un simbol $|p|$, numit *valoare de adevăr*. Dacă *p* este falsă, se scrie $|p| = 0$, iar dacă este adevărată, se notează $|p| = 1$.
Cu ajutorul *operatorilor logici*: $\rceil$ (negaţie), $\vee$ (disjuncţia), $\wedge$ (conjuncţia), $\rightarrow$ (implicaţia), $\leftrightarrow$ (echivalenţa) se pot forma *propoziţii compuse*. Astfel, dacă p, q sunt două propoziţii fixate, definim propoziţiile: $\rceil p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ prin valorile de adevăr ale acestora conform tabelului:

p	q	$\rceil p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

O propoziţie compusă se numeşte *tautologie* dacă este adevărată oricare ar fi valoarea de adevăr a propoziţiilor componente.

Să se demonstreze că dacă *p* şi *q* sunt două propoziţii oarecare, atunci propoziţiile compuse de mai jos sunt tautologii:
1^o $p \vee p \leftrightarrow p$; $p \wedge p \leftrightarrow p$ (*principiul idempotenţei*);
2^o $p \vee (\rceil p)$ (*principiul terţului exclus*);
3^o $\rceil \rceil p \leftrightarrow p$ (*principiul dublei negaţii*);
4^o $\left.\begin{array}{l} \rceil (p \vee q) \leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q \\ \rceil (p \wedge q) \leftrightarrow \rceil p \vee \rceil q \end{array}\right\}$ (*principiul dualităţii* sau *relaţiile lui* ***De Morgan***).

Demonstraţia se realizează cu ajutorul tabelului, verificându-se fiecare combinaţie de valori de adevăr.

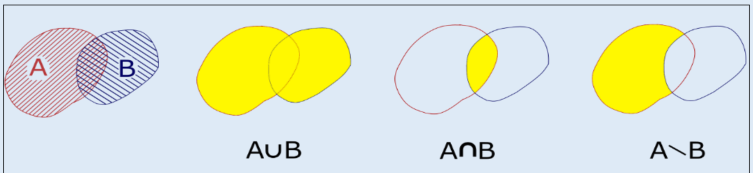
Noţiunea de *mulţime* este o noţiune primară, obţinută în urma unui proces de abstractizare. Pentru început se poate spune că o mulţime este o colecţie de obiecte care au o proprietate comună.
Mulţimea care nu are niciun element se numeşte *mulţimea vidă* şi se notează $\emptyset$.
Dacă elementul *a* aparţine mulţimii *A,* se va scrie $a \in A$; în caz contrar, $a \notin A$.

Se vor defini următoarele relaţii între mulţimi (*A* şi *B* sunt două mulţimi):
-*incluziune (nestrictă)*: $A \subseteq B \Leftrightarrow \big((\forall\, x)\ x \in A \ \Rightarrow x \in B\big)$ $(A \text{ este inclusă în } B)$;
-*egalitate*: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \ \wedge B \subseteq A$ (*A este egală cu B*);
- *incluziune strictă*: $A \subset B \ \Leftrightarrow A \subseteq B \ \wedge \ A \neq B$ (*A este inclusă strict în B*).

Dacă A este o mulţime, se notează cu $\mathcal{P}(A)$ mulţimea tuturor submulţimilor lui A sau *mulţimea părţilor* lui A.
Avem: $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ şi $M \subset A \ \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A)$.

Se definesc următoarele operaţii cu mulţimi:
- *reuniunea*: $A \cup B = \{\, x\, ;\ x \in A \ \vee x \in B\, \}$;
- *intersecţia*: $A \cap B = \{\, x\, ;\ \ x \in A \ \wedge x \in B\, \}$;

- *diferenţa*: $A \setminus B = \{ x ;\ x \in B \wedge x \notin A \}$.

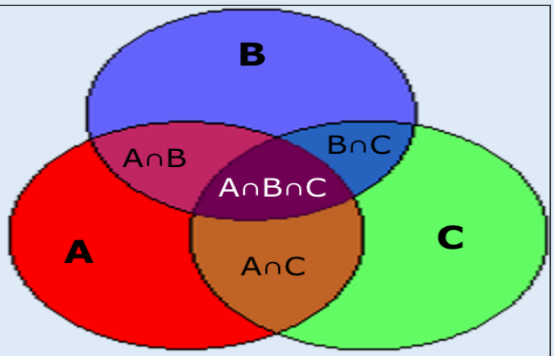


Operaţii cu mulţimi

Să se demonstreze că, pentru oricare două mulţimi A şi *B*, există relaţiile:
1^o $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = A$;
2^o $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$;
3^o $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$;
4^o $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

1^o Evident.
2^o ($\Rightarrow$) $(\forall) x \in A$ avem $x \in A \cup B = A \cap B$, deci $x \in B$ şi deci $A \subseteq B$. Analog se arată că $B \subseteq A$, deci $A = B$.
3^o Incluziunea " $\supseteq$ " este evidentă. Reciproc, fie $x \in A$ fixat; dacă $x \notin A \setminus B$, rezultă că $x \in B$, deci $x \in A \cap B$ şi deci $A \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
4^o $A \cup B =$ (conform 3^o) $= \big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\big) \cup \big((B \setminus A) \cup (A \cap B)\big) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

Reprezentarea grafică a trei mulţimi A, B, C prin diagrame Venn-Euler



Fie mulţimile A, B. Dacă $A \subseteq B$, mulţimea $B \setminus A$ se numeşte *complementara* lui A faţă de B şi se notează $\boldsymbol{C}_B A$ sau $\boldsymbol{C}A$ dacă nu există nicio posibilitate de confuzie.
Dacă A este fixată, se mai notează $C_B A = \bar{B}$.

Să se demonstreze că dacă X, Y sunt două submulţimi ale lui *A*, atunci:
$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{C}(X \cup Y) = \boldsymbol{C}X \cap \boldsymbol{C}Y \\ \boldsymbol{C}(X \cap Y) = \boldsymbol{C}X \cup \boldsymbol{C}Y \end{array}\right\}$$ (*relaţiile lui* **DE MORGAN**).

Avem $x \in \boldsymbol{C}(X \cup Y) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin X \cup Y) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin X \wedge x \notin Y) \Leftrightarrow (x \in A \setminus X \wedge x \in A \setminus Y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \boldsymbol{C}X \cap \boldsymbol{C}Y$.
În mod similar se demonstrează a doua afirmaţie.

O mulţime de mulţimi $A_i, i \in I$ se numeşte *familie* de mulţimi "I-indexată" şi se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Vom scrie:
$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x ;\ (\exists) i \in I\ a.î.\ x \in A_i \}$ (*reuniunea familiei* $(A_i)_{i \in I}$);
$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x ;\ x \in A_i\ (\forall) i \in I \}$ (*intersecţia familiei* $(A_i)_{i \in I}$).

Să se demonstreze:
$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{C}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} \boldsymbol{C}A_i \\ \boldsymbol{C}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \boldsymbol{C}A_i \end{array}\right\}$$ (*relaţiile lui* **DE MORGAN** *generalizate*).

$$x \in \boldsymbol{C}(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_i\ (\forall)\, i \in I \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{C} A_i\ (\forall)\, i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \boldsymbol{C}A_i.$$
A doua afirmaţie se demonstrează înlocuind A_i cu $\boldsymbol{C}A_i$.

Se dau mulţimile X, Y . Se defineşte *produsul cartezian* al acestora mulţimea:
$$X \times Y = \{ (x, y);\ x \in A \wedge\ y \in B \},$$
unde (x, y) este *pereche ordonată*, adică $(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow x = y$.

Să e demonstreze că, dacă A, B, C sunt trei mulţimi, atunci:

1^o $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$;
2^o $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \cap C)$;
3^o $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
4^o $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$.

1^o $(x,y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \Leftrightarrow \big((x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in B \times A\big) \Leftrightarrow \big((x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in B \wedge y \in A)\big) \Leftrightarrow$ $((x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in A \wedge y \in B)) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap B) \times (A \cap B)$.
În mod similar se demonstrează şi celelalte afirmaţii.

Se numeşte *relaţie binară* (relaţie) de la mulţimea X la mulţimea Y o submulţime $\mathcal{R}$ a produsului cartezian $X \times Y$. Astfel, dacă $(x,y) \in \rho \subset X \times Y$, se va scrie $x\,\rho\,y$ şi se spune că *x este în relaţia ρ cu y*.

O relaţie binară f de la mulţimea X la mulţimea Y se numeşte *funcţie* (aplicaţie) *definită pe X cu valori în Y*, dacă:
1^o f este *completă:* $D_f := \{\, x \in X\,;\ (\exists) y \in Y\ a.\hat{\imath}.\,(x,y) \in f \,\}$ coincide cu *X*;
2^o f este *univocă:* $(\forall)(x,y) \in f$ şi $(x,y') \in f \Rightarrow y = y'$.
X se numeşte *domeniu de definiţie* al funcţiei, iar *Y codomeniu*.
Se va nota $y = f(x)$ în loc de $(x,y) \in f$ şi se va spune că $f(x)$ este *imaginea* lui *x* prin *f* sau *valoarea funcţiei f* în *x*.
O funcţie *f* definită pe X cu valori în Y se notează astfel:

$$f : X \to Y\,; \quad X \xrightarrow{f} Y\ ; \quad X \ni x \mapsto f(x) \in Y\,; \ y = f(x), x \in X.$$

Dacă $A \subset X$ se defineşte *imaginea lui A prin f* mulţimea:
$$f(A) = \{\, y \in Y\,;\ (\exists) x \in A\ a.\hat{\imath}.\, f(x) = y \,\}.$$
Dacă $B \subset Y$ atunci se defineşte *preimaginea* lui B sau *imaginea reciprocă* a lui *B* prin *f*:
$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X\,;\ f(x) \in B \,\}.$$

Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci au loc relaţiile:

1^o $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$, $\forall A, B \subseteq X$;
2^o $\mathcal{C}_Y f(A) \subseteq f(\mathcal{C}_X A)$, $\forall\, A \subseteq X$, dcă $f(X) = Y$;
3^o $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, $\forall A, B \subseteq Y$;
4^o $f^{-1}(\mathcal{C}_Y B) = \mathcal{C}_X f^{-1}(B)$, $\forall B \subseteq Y$.
5^o $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$; $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$,
unde $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de submulţimi din *X*, iar *I* o familie arbitrară de indici.
6^o $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$; $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) \subset \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$,
unde $(B_i)_{i \in I}$ este o familie de submulţimi din *Y*, iar *I* o familie arbitrară de indici.

1^o $y \in f(A) \setminus f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B) \Leftrightarrow \exists x \in A$ cu $f(x) = y \wedge y \neq f(b)\ \forall\, b \in B \Rightarrow \exists x \in A \setminus B$ cu $f(x) = y \Leftrightarrow$ $y \in f(A \setminus B)$.
2^o Rezultă din 1^o.
3^o $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.
4^o Rezultă din 3^o.
5^o Avem: $y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow \big(\exists\, x \in \bigcup_{i \in I} A_i\ a.\hat{\imath}.\, y = f(x)\big) \Leftrightarrow \big(\exists i_0 \in I \wedge \exists\, x \in A_{i_0}\ a.\hat{\imath}.\, y = f(x)\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big(\exists y_0 \in I\ a.\hat{\imath}.\, y \in f(A_{i_0})\big) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

$$y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \Leftrightarrow \left(\exists\, x \in \bigcap_{i \in I} A_i\ a.\hat{\imath}.\, y = f(x)\right) \Rightarrow \big(\exists x \in A\,, \forall\, i \in I\ \ a.\hat{\imath}.\, y = f(x)\big)$$
$\Rightarrow (\,y \in f(A_i), \forall i \in i\,) \Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
6^o Similar.

Fie X, Y două mulţimi şi o aplicaţie $f : X \to Y$. Vom spune că *f* este:
- *injectivă*: dacă $\forall\ y \in Y$ există cel mult un $x \in X$ cu $f(x) = y$;
- *surjectivă*: dacă $\forall\ y \in Y$ există cel puţin un $x \in X$ cu $f(x) = y$;
- *bijectivă:* dacă $\forall\ y \in Y$ există exact un $x \in X$ cu $f(x) = y$.

Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie. Atunci:
1^o *f este injectivă* $\Leftrightarrow \forall\ A_1, A_2 \subseteq X$ cu $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, rezultă $A_1 \subseteq A_2$;
2^o *f este surjectivă* $\Leftrightarrow \forall\ B_1, B_2 \subseteq Y$ cu $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, rezultă $B_1 \subseteq B_2$

1^o

- ($\Rightarrow$) Se consideră un element $x_0 \in A_1$ şi va trebui să arătăm că, în condiţiile din ipoteză, $x_0 \in A_2$.

Din $x_0 \in A_1$ rezultă $f(x_0) \in f(A_1)$, iar din $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ rezultă $f(x_0) \in f(A_2)$ adică există un $x_1 \in A_2$ pentru care $f(x_1) = f(x_0)$. Din injectivitatea funcţiei rezultă că $x_1 = x_0$. Aşadar, $x_0 \in A_2$.

- ($\Leftarrow$) Reciproc, se presupune că pentru orice submulţimi $A_1, A_2 \subseteq X$ cu proprietatea $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, există relaţia $A_1 \subseteq A_2$şi să demonstrăm că f este injectivă. Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Se consideră $A_1 = \{x_1\}$ şi $A_2 = \{x_2\}$. Avem $f(A_1) = f(A_2)$şi deci, conform ipotezei, $A_1 = A_2$ deci $x_1 = x_2$.

2^o

- ($\Rightarrow$) Se presupune că f este surjectivă şi se consideră două submulţimi $B_1, B_2 \subseteq Y$ cu $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

Fie un element $y_0 \in B_1$; deoarece f este surjectivă, există un $x_0 \in X$ a.î. $f(x_0) = y_0$ deci $x_0 \in f^{-1}(B_1)$ şi din $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ rezultă $x_0 \in f^{-1}(B_2)$ deci $f(x_0) \in B_2$. Aşadar $y_0 \in B_2$.

- ($\Leftarrow$) Se presupune valabil faptul că pentru oricare două submulţimi $B_1, B_2 \subseteq Y$ cu proprietatea $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ avem $B_1 \subseteq B_2$ şi să considerăm un element arbitrar $y_0 \in Y$ şi să demonstrăm că există un $x_0 \in X$ a.î. $y_0 = f(x_0)$.

Într-adevăr dacă $y_0 \in Y$ şi dacă presupunem (prin reducere la absurd) că nu există niciun element $x_0 \in X$ pentru care $y_0 = f(x_0)$ ar rezulta că $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$. Atunci am avea pentru orice $y_1 \in f(X)$ relaţia $f^{-1}(\{y_0\}) \subset f^{-1}(\{y_1\})$. Deci, conform ipotezei, $\{y_0\} \subset \{y_1\}$, ceea ce înseamnă că $y = y_1$. Rezultă că $y \in f(X)$, ceea ce contrazice presupunerea făcută $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$.

■ Pentru oricare două funcţii $f: X \to Y$ şi $g: Y \to Z$ se defineşte *compunerea* acestora ca fiind funcţia $g \circ f: X \to Z$, $g \circ f\ (x) = g\big(f(x)\big)$.

Observaţii:

1^o Pentru a putea compune două funcţii, este necesar ca domeniul de definiţie al celei de-a două să fie egal cu codomeniul primeia.

2^oCompunerea funcţiilor nu este comutativă, adică oricare ar fi funcţiile $f, g: X \to X$, nu este obligatoriu ca $f \circ g = g \circ f$.

O aplicaţie $f: A \to B$ se numeşte *inversabilă* dacă există o aplicaţie notată $f^{-1}: B \to A$ şi numită *inversa* lui f şi care satisface condiţiile: $(f^{-1} \circ f)\ (x) = x, \forall\ x \in A$ şi $(f \circ f^{-1})(y) = y, \forall\ y \in B$.

O funcţie $f: A \to A$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

1^o ($\Rightarrow$) Considerăm funcţia inversabilă $f: A \to A$ şi să demonstrăm că este bijectivă. Deci există o aplicaţie $f^{-1}: A \to A$ cu proprietatea: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x,\ \forall\, x, y \in A$.

Dacă există $x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$, atunci, deoarece f^{-1}este funcţie, $f^{-1}\big(f(x_1)\big) = f^{-1}\big(f(x_2)\big)$ (v. proprietatea de *completitudine* de la definiţia funcţiei), de unde rezultă că $x_1 = x_2$. Astfel s-a demonstrat injectivitatea funcţiei f.

Fie acum un $y_0 \in A$. Folosind proprietatea de *univocitate* de la definiţia funcţiei, rezultă că putem nota $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Astfel s-a demonstrat că există un x_0 pentru care $f(x_0) = y_0$, aşadar f este şi surjectivă.

2^o ($\Leftarrow$) Considerăm funcţie bijectivă $f: A \to A$ şi să demonstrăm că este inversabilă. Vom considera relaţia f^{-1}definită pe mulţimea A prin relaţia: $x\ f^{-1} y \iff f(x) = y,\ \forall\, x, y \in A$ şi se va demonstra că f^{-1}satisface cele două condiţii din definiţia funcţiei.

Fie un $y \in A$. Deoarece f este surjectivă, există un $x \in A$ pentru care $f(x) = y$, deci există $f^{-1}(y)$ şi acesta este chiar x.

Presupunem acum că există $x_1, x_2, y \in A$ cu proprietăţile: $y\ f^{-1} x_1$ şi $y\ f^{-1} x_2$. Rezultă $f(x_1) = y = f(x_2)$ şi, cum f este injectivă, rezultă $x_1 = x_2$ şi astfel s-a demonstrat şi a doua condiţie din definiţia funcţiei, deci f^{-1} este funcţie, fiind chiar inversa lui f.

■ **0.1.9.** Fie mulţimile X, Y, Z şi funcţiile $f: X \to Y,\ \ g: Y \to Z,\ \ u: Z \to X$. Atunci:

1^o Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci şi f este injectivă.

2^o Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci şi g este surjectivă.

3^o Dacă oricare două din funcţiile $u \circ g \circ f,\ \ g \circ f \circ u,\ \ f \circ u \circ g$ sunt injective şi a treia este surjectivă (sau oricare două din ele sunt surjective şi a treia injectivă) atunci f, g, u sunt bijective.

1^o Fie $x_1, x_2 \in X$ astfel ca $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $g\big(f(x_1)\big) = g(f(x_2))$, adică $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ şi cum $g \circ f$ este injectivă rezultă $x_1 = x_2$.

2^o Deoarece $g \circ f$ este surjecţie, oricare ar fi $z \in Z$ există $x \in X$ astfel încât $z = g\big(f(x)\big)$. Deci există $y = f(x) \in Y$ astfel încât $z = g(y)$.

3^o

■ O relaţie definită pe mulţimea A şi anume $\mathcal{R} \subset A \times A$ se numeşte *relaţie de echivalenţă* pe mulţimea A dacă este:

- *reflexivă*: $(a, a) \in \mathcal{R},\ \ \forall\ a \in A$;

- *simetrică*: $(a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$;
- *tranzitivă*: $(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$.

Să se demonstreze că egalitatea a două mulţimi este o relaţie de echivalenţă.

■ Se consideră relaţia de echivalenţă $\mathcal{R} \subset A \times A$, unde A este o mulţime. Oricărui element $a \in A$ i se asociază mulţimea: $\mathcal{R}_a = \{b \in A\,;\ \ a\,\mathcal{R}\,b\}$,
numită *clasa de echivalenţă* a elementului a.

Să se demonstreze că mulţimea claselor de echivalenţă ale unei relaţii de echivalenţă $\mathcal{R} \subset A \times A$, mulţime notată $A\,/\,\mathcal{R}$, formează o *partiţie* a mulţimii A, numită *mulţimea cât* (*factor*) a lui A prin relaţia $\mathcal{R}$, deci posedă proprietăţile:
1^o Elementele acesteia sunt mulţimi nevide;
2^o Elementele acesteia sunt mulţimi disjuncte între ele două câte două;
3^o Reuniunea acestor mulţimi este chiar mulţimea A.

Avem $A\,/\,R = \{\mathcal{R}_a\,;\ \ a \in A\,\}$ şi se remarcă faptul că pentru două elemente distincte $a, b \in A$, clasele de echivalenţă $\mathcal{R}_a, \mathcal{R}_b$ sunt disjuncte sau concid. De asemenea, datorită proprietăţii de reflexivitate, orice element $a \in A$ aparţine măcar unei clase de echivalenţă ($a \in \mathcal{R}_a$), deci $\bigcup_{a \in A} \mathcal{R}_a = A$.

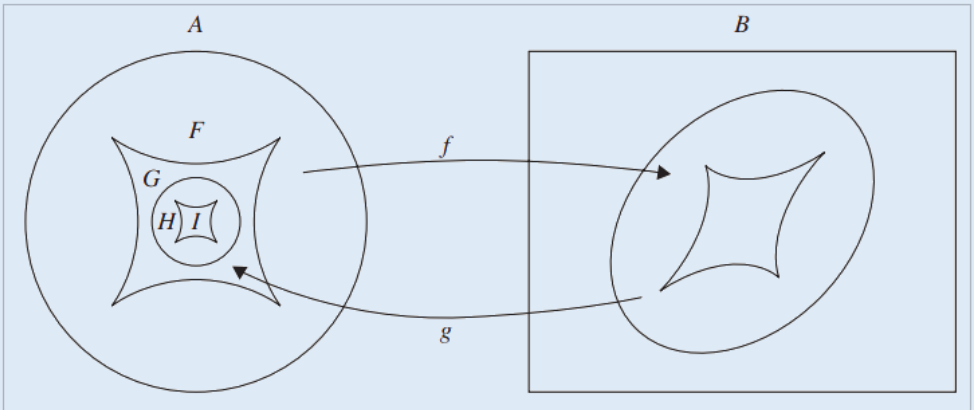
■ (*Teorema punctului fix a lui* **KNASTER-TARSKI**) Fie mulţimea A şi funcţia $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ ''crescătoare'', adică dacă $B \subseteq C \subseteq A$ atunci $f(B) \subseteq f(C)$. Să se demonstreze că există $G \subseteq A$ astfel încât $f(G) = G$.

Avem $\emptyset \subseteq f(\emptyset)$ şi $A \supseteq f(A)$. Vom demonstra că există o mulţime G astfel încât $G \subseteq f(G)$ şi $f(G) \subseteq G$.
Fie $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{P}(A)\colon\ B \subseteq f(B)\}$ şi fie $G = \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B$. Dacă $B \in \mathcal{G}$ atunci $B \subseteq G$ şi astfel $f(B) \subseteq f(G)$. Astfel $B \subseteq f(B) \subseteq f(G)$.
Rezultă $G = \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \subseteq f(G)$ şi astfel $G \in \mathcal{G}$. Pe de altă parte, deoarece $G \subseteq f(G)$ rezultă că $f(G) \subseteq f(f(G))$ şi deci $f(G) \in \mathcal{G}$.
Astfel $f(G) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B = G$.

■ (*Teorema* **SCHRÖDER-BERNSTEIN**). Fie mulţimile A, B şi funcţiile injective $f\colon A \to B$ şi $g\colon B \to A$. Atunci $A \sim B$.

Se consideră aplicaţiile $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ şi $g\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, determinate de funcţiile f şi g. Se observă că acestea sunt crescătoare.
Pe de altă parte, aplicaţia $C_A\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ definită prin $C_A(D) = A \setminus D$ este descrescătoare, ca de altfel şi aplicaţia similară $C_B\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$. Astfel aplicaţia compusă $S = C_A \circ g \circ C_B \circ f\ :\ \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ este crescătoare.
Teorema punctului fix a lui **KNASTER-TARSKI** susţine că există o mulţime $D \subseteq A$ astfel încât $S(D) = D$. Restricţia $f_{|D}$ este o bijecţie definită pe D cu valori în $f(D)$. Fie $E = f(D)$, astfel că $C_B\big(f(D)\big) = B \setminus E$. Atunci:

$$A \setminus D = C_A(D) = C_A\big(S(D)\big) = C_A\big(C_A \circ g \circ C_B \circ f(D)\big) = g\big(C_B f(D)\big) = g(B \setminus E).$$



$S(\phi) = F;\ S(F) = F \cup H;\ S(A) = F \cup H \cup I$

Restricţia $g_{|B \setminus E}$ este o bijecţie definită pe $B \setminus E$ cu valori în $A \setminus D$; fie $k\colon A \setminus D \to B \setminus E$ inversa acesteia.
Punem $h(a) = f_{|D}(a)$ pentru $a \in D$ şi $h(a) = k(a)$ pentru $a \in A \setminus D$. Se observă că h posedă proprietăţile cerute.

■ O relaţie definită pe mulţimea A şi anume $\mathcal{R} \subset A \times A$ se numeşte *relaţie de ordine* (parţială) pe mulţimea A dacă este:
- *reflexivă*: $(a,a) \in \mathcal{R},\ \ \forall\, a \in A$;
- *antisimetrică*: $(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow\ \ a = b$;
- *tranzitivă*: $(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$.

În acest caz, se spune că mulţimea A este *ordonată*.

Incluziunea nestrictă ($\subseteq$) a două mulţimi este o relaţie de ordine.

■ Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată şi $A \subseteq X$ o submulţime a sa. Vom spune că M (respectiv *m*) este un *majorant* (respectiv *minorant*) al mulţimii *A* dacă $x \leq M$ (respectiv $m \leq x$), $\forall\, x \in A$.

Un minorant (respectiv majorant) al mulţimii A şi care aparţine mulţimii A se numeşte *prim element, cel mai mic element* sau *minim* (respectiv *ultim element, cel mai mare element* sau *maxim*) şi se notează cu $\min A$ (respectiv $\max A$).

Spunem că $(X, \leq)$ este o mulţime *total ordonată* sau *lanţ* (în care caz vom spune că $\leq$ este o *relaţie de ordine totală*) dacă pentru orice $a, b \in X$ avem $a \leq b$ sau $b \leq a$ (proprietatea de *trihotomie*).

Dacă $(X, \leq)$ este o mulţime total ordonată, se spune că aceasta este *bine ordonată* dacă pentru orice submulţime nevidă $A \subseteq X$ posedă un prim element adică există un element $a \in A$ cu proprietatea $a \leq x,\ \ \forall\, x \in A$.

Orice submulţime a unei mulţimi bine ordonate are un prim element şi acesta este unic.

Cel mai mic majorant (respectiv cel mai are minorant) al mulţimii *A* se numeşte *margine superioară* (respectiv *margine inferioară*) a mulţimii *A* şi se notează cu $\sup A, \sup\limits_{x\in A} x$ (respectiv $\inf A, \inf\limits_{x\in A} x$).

■ Se notează cu $\mathcal{U}$ (*mulţimea-univers*) mulţimea tuturor mulţimilor ce se vor studia ulterior. Se spune că două mulţimi $A, B \in \mathcal{U}$ sunt *echipotente* şi se notează $A \sim B$ dacă există o funcţie bijectivă $f: A \to B$.
Relaţia de echipotenţă a două mulţimi este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{U}$.

Demonstraţia este simplă.

Clasele de echivalenţă se vor numi *numere cardinale*. Astfel, clasa de echipotenţă a mulţimii $A \in \mathcal{U}$ se va numi *cardinalul lui A* şi se va nota $\bar{\bar{A}}$ sau $card\ A$.

■ Se defineşte *mulţimea asociată* unei mulţimi $A \in \mathcal{U}$ ca fiind mulţimea notată: $\widetilde{A} \coloneqq \{(a, A);\ \ a \in A\}$.

Dacă $A, B \in \mathcal{U}$ şi $A \sim B$, atunci $\widetilde{A} \sim \widetilde{B}$.

Într-adevăr, dacă $f: A \to B$ este o bijecţie, atunci aplicaţia $\tilde{f}: \tilde{A} \to \tilde{B}$, definită prin $\tilde{f}\,(a, A) = (f(a), B)$ este o bijecţie.

■ Se defineşte *reuniunea disjunctă* a două mulţimi $A, B \in \mathcal{U}$ mulţimea notată: $A \vee B = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$.

Dacă $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{U}$ cu $A_1 \sim A_2$ şi $B_1 \sim B_2$, atunci: $A_1 \vee B_1 \sim A_2 \vee B_2$.

Fie $A_1 \neq B_1$, deci $\widetilde{A_1} \cap \widetilde{B_1} = \emptyset$. Bijecţiile $\tilde{f} : \widetilde{A_1} \to \widetilde{A_2},\ \tilde{g} : \widetilde{B_1} \to \widetilde{B_2}$ determină bijecţia:

$F: \widetilde{A_1} \cup \widetilde{B_1} \to \widetilde{A_2} \cup \widetilde{B_2}$ prin $F(a, A_1) = \tilde{f}\,(a, A_1)$ şi $F(b, B_1) = g(b, B_1)$.

(S-a presupus şi $A_2 \neq B_2$.)

■ Dându-se o mulţime $A \in \mathcal{U}$, o aplicaţie $f: A \times A \to A$ se numeşte *lege de compoziţie internă* sau *operaţie*. Dacă operaţia este notată printr-un simbol $*$, atunci se poate nota: $f\big((a, b)\big) \coloneqq a * b,\ \ \forall\, a, b \in A$.

Dacă $*: A \times A \to A$ este o lege de compoziţie pe mulţimea A, spunem că o submulţime $B \subseteq A$ este *parte stabilă* în raport cu legea de compoziţie, dacă $\forall\, x, y \in B \ \Rightarrow\ \ x * y \in B$.

Pe mulţimea numerelor cardinale sepoate defini o operaţie aditivă :
Fie $a = \bar{\bar{A}},\ \ b = \bar{\bar{B}}$.
Se numeşte *sumă a numerelor cardinale* a şi b numărul cardinal, notat $a + b$, al mulţimii $A \vee B$.

Oricare ar fi numerele cardinale a, b, c au loc proprietăţile:
1^o $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*asociativitatea adunării*);
2^o $a + b = b + a$ (*comutativitatea adunării*).

Se aplică exerciţiul precedent.

■ Fie $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{U}$, astfel încât: $A_1 \sim A_2$ şi $B_1 \sim B_2$. Atunci: $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.

Dacă $f: A_1 \to A_2$ şi $g: B_1 \to B_2$ sunt două funcţii bijective şi $f: B_1 \to A_1$, atunci:

$$f \times g : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2,$$

definită prin:

$$(f \times g)(a, b) = \big(f(a), g(b)\big)$$

este o bijecţie.

■ Se numeşte *produs al numerelor cardinale* a şi b numărul cardinal, notat $a \cdot b$ sau ab, al mulţimii $A \times B$.

Dacă a, b, c sunt trei numere cardinale, atunci:
1^o $a(b + c) = ab + ac$ (*distributivitatea produsului faţă de adunare*);
2^o $a(bc) = (ab)c$ (*asociativitatea produsului*);
3^o $ab = ba$ (*comutativitatea produsului*).

Se aplică exerciţiul precedent.

■ Dacă a, b sunt două numere cardinale, atunci prin a *ridicat la puterea* b se înţelege numărul cardinal a^b al mulţimii aplicaţiilor de la B la A, $\{f: B \to A\}$.

Dacă $A_1, A_2, B_1, B_3 \in \mathcal{U}$ şi $A_1 \sim A_2$ şi $B_1 \sim B_2$, atunci:

$$\{f: B_1 \to A_1\} \sim \{g: B_2 \to A_2\}.$$

Să se deducă de aici că dacă a, b, c sunt trei numere cardinale, atunci:
1^o $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;
2^o $a^c \cdot b^c = (ab)^c$;
3^o $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

Fie $h_1: A_1 \to A_2$, $h_2: B_1 \to B_2$ două bijecţii şi $f: B_1 \to A_1$ o aplicaţie oarecare. Atunci $F(f) = h_1 \circ f \circ h_2^{-1}$ $\forall f$ este o aplicaţie bijectivă de la $\{f: B_1 \to A_1\}$ la $\{g: B_2 \to A_2\}$.

■ Se spune că numărul cardinal $a = \bar{\bar{A}}$ este mai mic sau egal cu numărul cardinal $b = \bar{\bar{B}}$ şi se scrie $a \leq b$ dacă există o submulţime $B' \subseteq B$ astfel încât $A \sim B'$. (De asemenea, se va scrie $a < b$ dacă $a \leq b$ şi $a \neq b$.)
Astfel s-a definit o relaţie binară $\leq$ pe mulţimea $\mathcal{U} \mid \sim$ a cardinalilor universului $\mathcal{U}$.

Dacă a, b, c sunt numere cardinale, atunci:
1^o $a \leq a$;
2^o $a \leq b \;\wedge\; b \leq c \;\Rightarrow a \leq c$.

1^o Este evident că $A \sim A$.
2^o Din $A \sim B'$, $B' \subset B$, $B \sim C'$, $C' \subset C$ rezultă $A \sim C''$ şi $C'' \subset C$.

■ (*Teorema lui* **Felix Berstein**). Dacă $a = \bar{\bar{A}}$, $b = \bar{\bar{B}}$ şi se verifică simultan relaţiile $a \leq b$ şi $b \leq a$, atunci $a = b$.

Prin ipoteză, există aplicaţiile bijective $f: A \to B'$, $B' \subset B$, $g: B \to A'$, $A' \subset A$.
Definim funcţia: $\varphi: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ prin:

$$\varphi(E) = A \cap \overline{\left[\, g\big(B \cap \overline{f(E)}\big) \,\right]}. \qquad (1)$$

Se vede că φ are proprietatea de ''monotonie'':

$$E \subset F \;\Rightarrow \varphi(E) \subset \varphi(F). \qquad (2)$$

Se consideră mulţimea $\mathcal{D} = \{E : \; E \in \mathcal{P}(A) \wedge E \subset \varphi(E)\}$. Rezultă $\emptyset \in \mathcal{D}$. Fie apoi $D = \cup_{\mathcal{D}}$. Cum $E \subset D$, pentru fiecare $E \in \mathcal{D}$, (2) implică $E \subset \varphi(E) \subset \varphi(D)$, $\forall\, E \in \mathcal{D}$. Deci $D \subset \varphi(D)$.
Se aplică din nou proprietatea (2) funcţiei φ şi se obţine $\varphi(D) \subset \varphi\big(\varphi(D)\big)$. Rezultă $\varphi(D) \in \mathcal{D}$.
Este valabilă şi incluziunea inversă $D = \cup_{\mathcal{D}} \supset \varphi(D)$. Deci $D = \varphi(D)$. Se aplică (1) şi rezultă:

$$D = A \cap \overline{\left[\, g\big(B \cap \overline{f(D)}\big) \,\right]}.$$

Atunci $A \cap \bar{D} = g\big(B \cap \overline{f(D)}\big)$. Urmează că funcţia h definită prin:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru} \quad x \in D \\ g^{-1}(x) & \text{pentru} \quad x \in A \setminus D \end{cases}$$

realizează o bijecţie a lui A cu B.

■ Pe mulţimea numerelor cardinale, $\leq$ este o relaţie de ordine.

Se aplică cele două exerciţii anterioare.

■ (*Teorema lui* **CANTOR**) Fie A o mulţime arbitrară. Atunci $card\ A < card\ \mathcal{P}(A)$.

Dacă $A = \emptyset$, avem $card\ A = 0 < 1 = card\ \mathcal{P}(A)$.
Presupunem acum că $A \neq \emptyset$. Deoarece aplicaţia $A \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ este injectivă, avem $card\ A \leq card\ \mathcal{P}(A)$.
Dacă am avea $card\ A = card\ \mathcal{P}(A)$, atunci $\exists f: A \to \mathcal{P}(A)$ bijectivă şi notăm $f(x)$ prin A_x $(x \in A)$. Se consideră mulţimea:

$$M \coloneqq \{x \in A : \ x \notin A_x\}.$$

Cum $M \in \mathcal{P}(A)$, $\exists\, x_0 \in A$ cu $A_{x_0} = M$. Dacă $x_0 \in A_{x_0}$, avem $x_0 \notin M = A_{x_0}$, absurd, iar dacă $x_0 \notin A_{x_0}$, avem $x_0 \in M = A_{x_0}$, iarăşi absurd.

■ Fie $(A, \leq)$ o mulţime bine ordonată şi $a \in A$. Submulţimea:

$$A_a = \{x \in A : \ x < a\}$$

se numeşte *semidreaptă* din A determinată de elementul a.

(*Principiul inducţiei transfinite*). Fie $(A, \leq)$ o mulţime bine ordonată. Dacă A' este o submulţime a lui A cu proprietăţile:
1^o A' conţine primul element din A;
2^o Pentru orice semidreaptă $A_a \subseteq A'$ avem $a \in A'$, atunci mulţimea A' coincide cu mulţimea A.

Să presupunem că submulţimea $A' \subseteq A$ posedă proprietăţile 1^o şi 2^o dar că $A' \neq A$.
Atunci $A \setminus A'$ este submulţime nevidă a mulţimii bine ordonate A şi care admite un prim element b iar $b \notin A'$. Atunci $A_b \subseteq A'$, dar conform 2^o, $b \in A'$, ceea ce este absurd.

■ Fie $(A, \leq)$ o mulţime total ordonată cu prim element. Dacă singura submulţime A' a lui A care satisface condiţiile 1^o şi 2^o de la exerciţiul precedent este chiar A, atunci $(A, \leq)$ este bine ordonată. (reciproca teoremei anterioare)

Presupunem că B este o submulţime nevidă a lui A care nu are prim element. Atunci $A' = A \setminus B$ este o submulţime a lui A care nu conţine primul element din A. Dacă A_a este o semidreaptă din A', atunci $a \in A'$, în caz contrar, a ar fi primul element din B.
Conform principiului inducţiei transfinite, $A' = A$, adică $A \setminus B = A$, deci $B = \emptyset$, ceea ce contrazice presupunerea iniţială.

Observaţie. Ultimele două teoreme, care sunt mutual reciproce, arată că principiul inducţiei transfinite este echivalent cu buna ordonare. Vom spune că teoremele care sunt demonstrate pe baza acestui principiu sunt demonstrate *prin recurenţă*.

■ Două mulţimi total ordonate, (A, ρ) şi (B, σ) se numesc *asemenea*, şi se scrie $A \approx B$, dacă există o bijecţie $f: A \to B$ cu proprietatea:

$$x\rho y \ \Rightarrow f(x)\sigma\, f(y), \ \forall\, x, y \in A.$$

Dacă $(A, \leq)$ este o mulţime bine ordonată şi $f: A \to A$ este o asemănare, atunci: $x \leq f(x)$, $\forall\, x \in A$.

Presupunem că există un $x_0 \in A$ cu proprietatea $f(x_0) < x_0$; fie a cel mai mic element x_0 cu această proprietate.
Avem $f(a) < a$ şi, aplicând asemănarea, deducem $\big(f(a)\big) < f(a)$. Deci $f(a) = b$ are proprietatea $f(b) < b$ şi cum $f(a) < a$, adică $b < a$, rezultă că a nu este cel mai mic element, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

■ Dacă $(A, \leq)$ şi $(B, \preccurlyeq)$ sunt două mulţimi bine ordonate, atunci:
1^o A nu este asemenea cu nicio semidreaptă A_a a sa;
2^o $A_x \approx A_y \ \Rightarrow x = y$;
3^o $A \approx B$ implică existenţa unei singure asemănări $f: A \to B$.

1^o Admitem prin absurd că $f: A \to A_x$ este o asemănare pentru un $x \in A$.

Conform exerciţiului precedent, $x \leq f(x)$. Dar $f(x) \in A_x$, deci $f(x) < x$, contradicţie.
2^o Din $A_x \approx A_y,\ x \neq y$ putem avea $x < y$, atunci A_y este asemenea cu o semidreaptă A_x a sa, în contradicţie cu 1^o.
3^o Fie $f, g: A \to B$ două asemănări. Rezultă $f^{-1} \circ g: A \to A$ este o asemănare. Conform exerciţiului precedent:

$$\forall\, x \in A,\ x \leq f^{-1} \circ g(x).$$

Atunci $f(x) \preccurlyeq g(x)$. Schimbând rolul lui f cu g, avem şi $g(x) \leq f(x)$.
Deci pentru orice $x \in A,\ f(x) = g(x)$.

■ **0.1.29.** Considerăm un ''univers'' $\mathcal{U}$ de mulţimi total ordonate. Se observă că relaţia de asemănare, definită în exerciţiul anterior, constituie o relaţie de echivalenţă. Clasa de echivalenţă a unei mulţimi total ordonate $(A, \leq)$ se va nota prin $ord\ A$ şi se va numi *tipul de ordine* al lui $(A, \leq)$. Dacă $(A, \leq)$ este bine ordonată, aceeaşi proprietate o va avea orice alt element $(B, \preccurlyeq)$ din $ord\ A$ şi se spune că $ord\ A$ este *numărul ordinal* al lui $(A, \leq)$.

Notăm cu $\mathcal{Z}$ mulţimea tuturor numerelor ordinale. Pe $\mathcal{Z}$ se poate defini o relaţie de ordine (parţială) în modul următor:
Fie (A, ρ) şi (B, σ) două mulţimi bine ordonate şi $\alpha = ord\ A,\ \beta = ord\ B$. Vom pune $\alpha \prec \beta$ dacă există $x \in B$ cu proprietatea $A \approx B_x$. Notăm $\alpha \preccurlyeq \beta$ dacă $\alpha \prec \beta$ sau $\alpha = \beta$. Se verifică uşor că $\alpha \preccurlyeq \beta$ depinde numai de numeralele ordinale α şi β şi nu depinde de reprezentanţii $(A, \rho),\ (B, \sigma)$.

Admiţând axioma alegerii, putem stabili proprietatea de dihotomie a mulţimii $(\mathcal{Z}, \preccurlyeq)$.

Axioma alegerii. Pentru orice familie $\mathcal{F}$ nevidă, de mulţimi nevide, disjuncte două câte două, există o mulţime A care are în comun cu fiecare mulţime din $\mathcal{F}$ un element şi numai unul.

Axioma alegerii este echivalentă cu fiecare dintre următoarele propoziţii:

Lema lui ***TUCKEY***. Orice familie nevidă de caracter finit are un element maximal.

Principiul de maximalitate al lui ***HAUSDORFF***. Orice mulţime nevidă parţial ordonată conţine un lanţ maximal.

Lema lui ***ZORN***. Orice mulţime nevidă parţial ordonată, în care fiecare lanţ este mărginit superior, admite un element maximal.

Teorema bunei ordonări a lui ***ZERMELO***. Orice mulţime poate fi bine ordonată.

Pentru orice pereche de numere ordinale α şi β are loc una şi numai una dintre relaţiile:

$$\alpha \prec \beta,\ \alpha = \beta,\ \beta \prec \alpha.$$

Exerciţiul anterior confirmă faptul că are loc cel mult una dintre relaţii. Mai trebuie să demonstrăm că se verifică cel puţin una dintre relaţii.
Dacă $\alpha = ord\ A,\ \beta = ord\ B,\ (A, \rho)$ şi (B, σ) fiind bine ordonate, fie $\mathcal{F}$ familia tuturor asemănărilor de la semidreptele lui A sau A la semidreptele lui B sau B , avem $\{(a, b)\} \in \mathcal{F}$, a fiind primul element din A şi b primul element din B. Deci $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Conform principiului de maximalitate al lui **HAUSDORFF**, există un lanţ maximal $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. Fie $h = \cup_{\mathcal{L}}$. Se verifică uşor că $h \in \mathcal{F}$.
Dacă $dom\ h$ şi $codom\ h$ sunt semidreptele A_x şi B_y ale lui A şi B, respectiv, atunci $h \cup \{(x, y)\}$ poate fi adăugată lui $\mathcal{L}$ şi aceasta poate contrazice maximalitatea lui $\mathcal{L}$.
Situaţia $dom\ h \neq A$ şi $codom\ h \neq B$ este exclusă. Din $dom\ h = A$ şi $codom\ h = B$ urmează $\alpha = \beta$; din $dom\ h = A$ şi $codom\ h = B_y$ rezultă $\alpha \prec \beta$; ultima posibilitate $dom\ h = A_x$ şi $codom\ h = B$ conduce la $\beta \prec \alpha$.

■ Mulţimea $(\mathcal{Z}, \preccurlyeq)$ este total ordonată; pentru orice a $\in \mathcal{Z},\ ord\ \mathcal{Z}_a = a$.

Se utilizează exerciţiul anterior, fie $a = ord\ A$. Se va construi o aplicaţie $f: \mathcal{Z}_a \to A$ ce se va dovedi asemănătoare în raport cu ordonările bune subînţelese. Pentru $x \in \mathcal{Z}_a$ are loc $x \prec a$. Conform ex. 0.2.15, există unic $y \in A$ astfel încât $\mathcal{Z}_x = A_y$; definim $y = f(x)$.

■ Pentru orice număr cardinal a există cel puţin un număr ordinal α astfel încât $a = \overline{\overline{\mathcal{Z}_\alpha}}$.

Fie $\overline{\overline{A}} = a$. Pe baza axiomei alegerii, există o bună ordonare ρ pe A. Se notează $\alpha = ord\ A$ şi din teorema precedentă se deduce că (A, ρ) este asemenea cu $(\mathcal{Z}_\alpha, \preccurlyeq)$. Deducem $A = \mathcal{Z}_\alpha$ şi prin urmare $a = \overline{\overline{\mathcal{Z}_\alpha}}$.

■ Se consideră mulţimea-univers $\mathcal{U}$ şi familia $\mathcal{U}\ /\!\sim$ a cardinalilor acesteia. Atunci ordonarea $\leq$ este totală şi bună.

Precizând bune ordonări $\leq_A$ (conform teoremei lui **Zermelo**) pentru fiecare element A din $\mathcal{U}$, obţinem un univers $\mathcal{U}' = \{(A, \leq_A):\ A \in \mathcal{U}\}$ de mulţimi bine ordonate. Fie $\mathcal{Z}$ mulţimea cardinalilor lui $\mathcal{U}'$. Pentru un număr cardinal a, există, conform teoremei precedente, un ordinal α încât $a = \overline{\overline{\mathcal{Z}_\alpha}}$. Dacă unui alt cardinal b îi corespunde ordinalul β are loc evident $a \leq b\ \Leftrightarrow \alpha \preccurlyeq \beta$. Conform celor două exerciţii anterioare, $(\mathcal{U}\ /\sim, \leq)$ este total şi bine ordonată.

Mulţimi, relaţii, funcţii. Exerciţii

■ Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale cardinalului unei mulţimi:

1^o $card\ (A \cup B) = card\ A + card\ B - card\ (A \cap B)$;

2^o $card\ (A \cup B \cup C) = card\ A + card\ B + card\ C - card\ (A \cap B) - card\ (A \cap C) - card\ (B \cap C) + card\ (A \cap B \cap C)$

3^o $card\ (A \setminus B) = card\ A - card\ (A \cap B)$

4^o $card\ (A \times B) = card\ A \cdot card\ B$.

■ Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie oarecare.

1^o Dacă f este simultan crescătoare şi monoton descrescătoare, atunci este constantă.

2^o Dacă f este simultan pară şi impară, atunci este funcţia nulă.

■ Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1^o Dacă f, g sunt (strict) crescătoare, atunci $f + g$, $f \circ g$ sunt (strict) crescătoare.

2^o Dacă f, g sunt (strict) descrescătoare, atunci $f + g$ este (strict) decrescătoare $f \circ g$ este (strict) crescătoare.

■ Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Să se arate că orice număr raţional este perioadă a lui f, dar niciun număr iraţional nu este perioadă a lui f. Are f perioadă principală?

■ Dacă $f: E \to F$, $g: G \to H$ şi $h: K \to L$ sunt trei funcţii astfel încât $F \subseteq G$ şi $H \subseteq K$, atunci $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Oricare ar fi $x \in E$ avem:

$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = ((h \circ g) \circ f)(x)$.

Vezi: Clase de funcţii

Mulţimi de numere

0.2.1. Se defineşte *mulţimea numerelor naturale* ca fiind un sistem $(\mathbb{N}, 0, s)$ format dintr-o mulţime $\mathbb{N}$, un element fixat $0 \in \mathbb{N}$ (numit *zero* sau *număr nul*) şi o funcţie $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, numită *funcţie de succesiune* şi care satisfac proprietăţile (*axiomele lui* ***Peano***):

- (N_1) $n \in \mathbb{N},\ s(n) \neq 0$ (0 nu este succesorul niciunui număr natural)
- (N_2) $m, n \in \mathbb{N},\ s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$ (funcţia de succesiune este injectivă)
- (N_3) Dacă o submulţime $M \subseteq \mathbb{N}$ satisface proprietăţile: $0 \in M$ şi $n \in M \Rightarrow s(n) \in M$ atunci $M = \mathbb{N}$ (*principiul inducţiei complete*).

Să se arate că orice număr natural diferit de zero este succesorul unui număr natural.

Fie $M = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } s(m) = n\}$. Conform (N_1), rezultă $0 \notin M$. Fie $n \in M$, deci există $m \in \mathbb{N}$ ci $s(m) = n$. De aici $s(n) = s\big(s(m)\big) \in M$. Conform (N_3), avem $\{0\} \cup M = \mathbb{N}$. Deci $M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Observaţii.

1^o Succesorul unui număr $n \in \mathbb{N}$ se mai notează şi $s(n) = n^*$.

2^o Convenim să notăm: $0^* = 1,\ 1^* = 2,\ 2^* = 3, \ldots$

3^o Propoziţia: $(\forall\, n)\ (n \in \mathbb{N}\ \land P(0)\ \land P(n) \to P(n^*)) \Rightarrow (\forall\, n)\ P(n)$

este adevărată şi se numeşte *teorema inducţiei complete*. În practică, principiul inducţiei se aplică sub forma:

$$\left.\begin{array}{r}(\exists)\ n_0 \geq 1 \text{ cu } P(n_0) \text{ adevărată.}\\ (\forall)\ n \geq n_0 \text{ cu } P(n) \text{ adevărată } \Rightarrow P(n+1) \text{ adevărată.}\end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ este adevărată } (\forall)\ n \geq n_0.$$

0.2.2. Se defineşte *adunarea numerelor naturale* ca fiind o lege de compoziţie care asociază la două numere naturale $a, b \in \mathbb{N}$ suma acestora, notată $a + b$, operaţie care posedă proprietăţile:

1^o $a \in \mathbb{N},\ a + 0 = a;$

2^o $a, b \in \mathbb{N},\ a + s(b) = s(a + b);$

Să se demonstreze că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$, avem:

1^o $a + 1 = s(a);$

2^o $0 + a = a;$

3^o $a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \land b = 0;$

4^o $s(a) + b = s(a + b);$

5^o $a + b = b + a$ (comutativitate);

6^o $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociativitate);

7^o $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b.$

1^0 $a + 1 = a + s(0) = s(a + 0) = s(a).$

2^o Fie $M = \{a \mid a \in \mathbb{N} \land 0 + a = a\}$. Avem $0 \in M$, iar dacă $n \in M$, atunci $0 + n = n$ şi deci $0 + s(n) = s(0 + n) = s(n)$ şi conform principiului inducţiei complete, $M = \mathbb{N}$.

3^0

4^0

5^0
6^0
7^0

Observaţie. Relaţiile $2^o, 5^o, 6^o$ arată că $(\mathbb{N}, +)$ este semigrup comutativ cu element neutru.

■ **0.2.3.** Se defineşte înmulţirea numerelor naturale ca fiind o lege de compoziţie care asociază la două numere naturale $a, b \in \mathbb{N}$ produsul acestora, notat $a \cdot b$ şi care posedă proprietăţile:
1^o $a \in \mathbb{N},\ a \cdot 0 = 0;$
2^o $a, b\ \in \mathbb{N},\ a \cdot s(b) = a \cdot b + a.$

Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$, atunci:
1^0 $a \cdot 1 = a;$
2^0 $0 \cdot\ a = 0;$
3^0 $a \cdot b = 0\ \Leftrightarrow a = 0 \lor\ b = 0;$
4^0 $s(a) \cdot b = a \cdot b + b;$
5^0 $a \cdot b = b \cdot a$ (comutativitate);
6^0 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativitate);
7^0 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivitatea înmulţirii faţă de adunare).

1^o

Observaţie. Relaţiile $1^o, 5^o, 6^o$ arată că $(\mathbb{N},\ \cdot)$ este semigrup comutativ cu element neutru.

■ **0.2.4.** Se defineşte o relaţie pe $\mathbb{N}$:
$$a, b \in \mathbb{N},\ a \leq b\ \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{N}\,,\ b = a + x.$$

Relaţia definită anterior este o relaţie de ordine totală şi bună pe $\mathbb{N}$.

Demonstraţia este evidentă.

■ Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$, avem:
1^o $0 \leq a;$
2^o $a < s(a);$
3^o $a < b\ \Leftrightarrow s(a) < s(b);$
4^o $a \leq b\ \Leftrightarrow a + c \leq b + c;$
5^o Dacă $c \neq 0$ atunci $a \leq b\ \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c;$
6^o $a \neq 0\ \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N},\ b \leq n \cdot a$ (*axioma lui **ARHIMEDE***).

1^o Rezultă din $a = 0 + a$.
2^o Rezultă din $s(a) = a + 1$.
3^o $a < b$ înseamnă că există $c \in \mathbb{N}$ încât $b = a + c$. Atunci $s(b) = s(a + c) = a + s(c) = s(a) + c$ şi deci $s(a) < s(b)$.
4^o
5^o
6^o

Observaţie. Din proprietăţile $4^o, 5^o$ rezultă compatibilitatea relaţiei de ordine cu adunarea respectiv înmulţirea, de unde se vede că în raport cu fiecare din cele două operaţii, mulţimea $\mathbb{N}$ este un *semigrup ordonat*.

■ Definim pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaţia $\sim$, definită prin:
$$(m, n) \sim (m', n')\ \Leftrightarrow m + n' = n + m'.$$
Să se demonstreze că aceasta este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţia este evidentă.

Observaţie. Mulţimea cât a acestei relaţii de echivalenţă o vom numi *mulţimea numerelor întregi* şi o vom nota:
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim.$$

Mai departe, vom nota $[m, n]$ clasa de echivalenţă (*numărul întreg*) care conţine cuplul (m, n).

■ **0.2.7.** Definim operaţiile de *adunare*, respectiv *înmulţire* a numerelor întregi prin:
$[m, n] + [m', n'] = [m + m', n + n']$, $\quad [m, n] \cdot [m', n'] = [m \cdot m' + n \cdot n', m \cdot n' + n \cdot m'$.

Să se demonstreze că $\mathbb{Z}$ este un *inel comutativ*, cu *element unitate*.

Este necesar să se demonstreze următoarele axiome:

- $(\mathbb{Z}, +)$ este *grup comutativ*:
  - 1^o $\quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z},\ a + b = b + a;$
  - 2^o $\quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z},\ (a + b) + c = a + (b + c);$
  - 3^o $\quad \exists\, \theta = [0,0] \in \mathbb{Z},\ \forall\, a \in \mathbb{Z},\ a + \theta = \theta + a = a;$
  - 4^o $\quad \forall\, a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z},\ a + b = b + a = \theta.$
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este un *semigrup comutativ* cu *element unitate*, adică:
  - 5^o $\quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z},\ a \cdot b = b \cdot a;$
  - 6^o $\quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z},\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
  - 7^o $\quad \exists e = [1, 0] \in \mathbb{Z},\ \forall\, a \in \mathbb{Z},\ a \cdot e = e\ \cdot a = a.$
- *Înmulţirea este distributivă faţă de adunare*, adică:

■ Oricare ar fi numerele întregi $a, b \in \mathbb{Z}$, ecuaţia $a + x = b$ are o soluţie unică pe $\mathbb{Z}$.

Fie $c = b + (-a)$, unde $-a$ este opusul lui a.
Avem: $a + c = a + \big(b + (-a)\big) = \big(a + (-a)\big) + b = 0 + b = b$, adică c este soluţie a ecuaţiei considerate.
Să arătăm că aceasta este unica soluţie. Presupunând că ar exista două soluţii c, d, din $a + c = a += b$, adunând $-a$ obţinem $c = d = b + (-a)$.

Observaţii.
1^o Elementul $x = b + (-a) \in \mathbb{Z}$ care este soluţia ecuaţiei $a + x = b$ se mai notează $x = b + (-a) \stackrel{\text{def}}{=} b - a$ şi se numeşte *diferenţa* dintre b şi a, iar operaţia $(a, b) \to b - a$ se numeşte *scădere*.
2^o Scăderea posedă următoarele proprietăţi:

- În $\mathbb{Z}$ scăderea este o operaţie binară definită peste tot (adică pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), spre deosebire de cazul mulţimii numerelor naturale, unde scăderea e definită numi pe mulţimea $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ a \leq b\}$.
- Ecuaţia $a + x = a$ are o soluţie unică $x = 0$. Deci elementul zero in axioma 3 este unic.
- Ecuaţia $a + x = 0$ are o soluţie unică $x = 0 + (-a) = -a$, adică *opusul* oricărui element $a \in \mathbb{Z}$ este *unic*.
- Din $a + (-a) = (-a) + a = 0$ şi proprietatea precedentă deducem că $-(-a) = a$, oricare ar fi numărul întreg $a \in \mathbb{Z}$.
- Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$ atunci $a + c = b + c \ \Leftrightarrow a = b$. Într-adevăr din $a + c = b + c$, adunând în ambii membri numărul $-a$ şi folosind proprietatea de asociativitate, deducem că $a = b$. Reciproca este evidentă.

De fapt toate aceste proprietăţi sunt valabile în orice grup comutativ.

■ Fie $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Atunci relaţia binară $\sim$, definită pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ prin:
$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc,$
este o relaţie de echivalenţă. Au loc următoarele relaţii:
1^o $\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b, c \in \mathbb{Z}^*,\ (a, b) \sim (ac, bc);$
2^o $\forall\, a \in \mathbb{Z},\ \forall b, c, d \in \mathbb{Z}^*,\ (a, b) \sim (ac, d) \Rightarrow d = bc$
3^o $\forall\, a \in \mathbb{Z},\ (a, a) \sim (1, 1)$ şi $(0, a) \sim (0, 1);$
4^o $[(a, b) \sim (c, d)\ \wedge\ a \neq 0] \Rightarrow [c \neq 0\ \wedge (b, a) \sim (d, c)].$

Faptul că $\sim$ este relaţie de echivalenţă şi primele trei relaţii sunt uşor de demonstrat. Pentru 4^o se va ţine seama că dacă $(a, b) \sim (c, d),\ \ a \neq 0$, atunci $ad = cb$. Dacă $c = 0$, avem contradicţia $a = 0$ sau $b = 0$. În consecinţă $c \neq 0$. Urmează că $(b, a), (d, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dar $ad = cb\ \Rightarrow (b, a) \sim (d, c)$.

■ Se numeşte *şir* o funcţie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Se vor nota termenii şirului $f(n) \stackrel{\text{def}}{=} a_n$. Un şir mai poate fi notat simplificat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau, mai simplu, (a_n).

Şirul (a_n) se numeşte *mărginit* dacă există un $b \in \mathbb{Q}_+$ a.î. $|a_n| < b,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Fie $\mathcal{B}$ mulţimea şirurilor mărginite.

Şirul (a_n) se numeşte *şir* ***Cauchy*** dacă pentru orice $e \in \mathbb{Q}_+$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ (deci care depinde de ε) astfel încât $|a_p - a_q| < \varepsilon$. pentru toţi $p, q > N(\varepsilon)$. Notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor şirurilor **Cauchy**.

Şirul (a_n) se numeşte *şir nul* dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ există un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încât $|a_p| < \varepsilon$, pentru toţi $p > N(\varepsilon)$. Notăm cu $\mathcal{N}$ mulţimea tuturor şirurilor nule.

Avem: $\mathcal{N} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

Este clar că $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Fie $(a_n) \in \mathcal{C}$; atunci $p, q > N(1) \Rightarrow |a_p - a_q| < 1$. Dacă b este cel mai mare dintre numerele raţionale $|a_1|, \ldots, |a_{N(1)}|, |a_{N(1)}| + 1$, atunci $|a_p| < b$ pentru toţi $p \in \mathbb{N}^*$.

Pe mulţimea $\mathcal{S}$ a şirurilor de elemente din $\mathbb{Q}$ definim operaţiile:

$$\begin{cases} (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \\ (a_n)(b_n) = (a_n b_n) \end{cases}$$

Atunci $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ este inel comutativ cu unitate.

Avem următoarele proprietăţi:
1^o $\mathcal{C}$ este *parte stabilă* în $\mathcal{S}$ în raport cu operaţiile $+$ şi $\cdot$;
2^o $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ este inel comutativ cu unitate;
3^o $\mathcal{N} \neq \mathcal{C}$;
4^o $\mathcal{N}$ este ideal în $\mathcal{C}$.

1^o Fie $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}, N(e)$ şi $M(e)$ întregii din $\mathbb{Z}_+$ asociaţi acestor şiruri. Dacă $p, q \geq \max\{N\left(\frac{e}{2}\right), M\left(\frac{e}{2}\right)\}$, atunci :

$$|a_p + b_p - (a_q + b_q)| < e\ .$$

Deci $(a_n) + (b_n) \in \mathcal{C}$.
Fie acum *c* şi *d* cu proprietatea $|a_n| < c,\ |b_n| < d,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $p, q > \max\{N\left(\frac{e}{2}\right), M\left(\frac{e}{2}\right)\}$, atunci:

$$|a_p b_p - a_q b_q| = |a_p b_p - a_p b_q + a_p b_q - a_q b_q| \leq |a_p| \cdot |b_p - b_q| + |b_q| \cdot |a_p - a_q| < \frac{ce}{2c} + \frac{de}{2d} = e.$$

Deci $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{C}$.
2^o $(\mathcal{C}, +, \cdot)$, după 1^o şi conform observaţiei, $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow (a_n) - (b_n) \in \mathcal{C}$, este subinel al inelului comutativ $\mathcal{S}$. Şirul constant $(1, 1, \ldots)$ este şir din $\mathcal{C}$ şi este unitate în raport cu produsul din $\mathcal{C}$.
3^o Proprietatea este evidentă deoarece $(1, 1, \ldots) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$.
4^o Dacă $(a_n), (b_n) \in \mathcal{N}$, atunci evident $(a_n) - (b_n) \in \mathcal{N}$, deci $(\mathcal{N}, +)$ este subgrup $(a_n) \in \mathcal{N}$ şi $(b_n) \in \mathcal{C}$; să arătăm că $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{N}$. Cum însă (b_n) este mărginit, există $c \in \mathbb{Q}_+$ încât $|b_n| < c, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie apoi $e \in \mathbb{Q}_+$ oarecare. Există $N\left(\frac{e}{c}\right)$ aşa ca pentru $\forall p > N\left(\frac{e}{c}\right)$ să avem $|a_p| < \frac{e}{c}$. Deci, pentru $p > N\left(\frac{e}{c}\right)$, avem $|a_p b_p| < |a_p| \cdot c < e$. Urmează că $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{N}$.

0.2.13. Mulţimea $\mathbb{R} = \mathcal{C} / \mathcal{N}$ se numeşte *mulţimea numerelor reale*. Numerele reale sunt deci elementele mulţimii factor $\mathcal{C} / \mathcal{N}$, deci au forma $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$. Se notează $\overline{0} = (0_n) + \mathcal{N} = \mathcal{N},\ (0_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*)$ şi $\overline{1} = (1_n) + \mathcal{N},\ (1_n = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*)$; $\overline{0}$ se numeşte numărul real zero, iar $\overline{1}$ unitatea din $\mathbb{R}$.

Dacă $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$ şi $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$ sunt numere reale arbitrare, atunci:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \big((a_n) + \mathcal{N}\big) + \big((b_n) + \mathcal{N}\big) = \big((a_n) + (b_n)\big) + \mathcal{N} = (a_n) + (b_n) + \mathcal{N} \\ \alpha \cdot \beta = \big((a_n) + \mathcal{N}\big) \cdot \big((b_n) + \mathcal{N}\big) = (a_n) \cdot (b_n) + \mathcal{N} = (a_n b_n) + \mathcal{N} \end{cases}$$

depind numai de numerele α, β şi nu de reprezentanţii $(a_n), (b_n)$ ai acestora.

Într-adevăr, dacă $\alpha = (a_n) + \mathcal{N} = (a_n') + \mathcal{N},\ \beta = (b_n) + \mathcal{N} = (b_n') + \mathcal{N}$, atunci fie $(a_n) - (a_n') = (c_n) \in \mathcal{N}$ şi $(b_n) - (b_n') = (d) \in \mathcal{N}$. Urmează că:

$$\alpha + \beta = \big((a_n) + \mathcal{N}\big) + \big((b_n) + \mathcal{N}\big) = \big((a_n') + (c_n) + \mathcal{N}\big) + \big((b_n') + (d_n) + \mathcal{N}\big) =$$
$$= \big((a_n') + \mathcal{N}\big) + \big((b_n') + \mathcal{N}\big).$$

De asemenea:

$$\alpha \cdot \beta = \big((a_n) + \mathcal{N}\big) \cdot \big((b_n) + \mathcal{N}\big) = \big((a_n') + (c_n) + \mathcal{N}\big)\big((b_n') + (a_n) + \mathcal{N}\big) = \big((a_n') + \mathcal{N}\big)\big((b_n') + \mathcal{N}\big).$$

■ Pentru mulţimea $(\mathbb{N}, \leq)$ are loc *principiul inducţiei transfinite*, anume:
Dacă o mulţime $M \subset \mathbb{N}$ are proprietăţile:
1^o $0 \in M$;
2^o Pentru orice semidreaptă $M_n \subset M$, avem $n \in M$,
atunci acea mulţime este chiar mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$.

Se particularizează forma generală a principiului inducţiei transfinite (Ex. 0.2.12)

■ O mulţime A se numeşte *finită* dacă există un număr natural $n \in \mathbb{N}$ astfel încât: $card\ A = card\ \{1, 2, \ldots, n\}$.

O mulţime A este finită dacă şi numai dacă oricare ar fi $B \subset A$, $B \neq A$, avem: $card\ A \neq card\ B$.

■ O mulţime care nu este finită se numeşte *infinită*.

Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este infinită.

Se observă că funcţia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită prin $f(n) = 2n$ este o injecţie nesurjectivă. Deci $card\ \mathbb{N} = card\ f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ şi $f(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$ ceea arată că $\mathbb{N}$ nu este finită, fiind echipotentă cu o parte strictă a sa.

■ Adunarea şi înmulţirea numerelor cardinale induc operaţiile de adunare şi înmulţire în mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale.

Mai întâi demonstrăm că suma a două numere naturale $m, n \in \mathbb{N}$ este un număr natural $\forall m, n \in \mathbb{N}$.
Din asociativitatea adunării numerelor cardinale rezultă:
$$m + n^* = m + (n + 1) = (m + n) + 1 = (m + n)^*,$$
unde s-a notat cu $*$ succesorul unui număr natural.
Fixând un număr natural oarecare $m \in \mathbb{N}$, fie M mulţimea acelor numere naturale n pentru care suma de două numere cardinale $m + n$ este un număr natural. Din $m + 0 = m$ rezultă $0 \in M$.
Mai departe, dacă $n \in M$, atunci $m + n \in \mathbb{N}$ şi $m + n^* = (m + n)^* \in \mathbb{N}$, deci $n^* \in M$. Aplicând principiul inducţiei, rezultă că M este chiar $\mathbb{N}$. Cum m a fost ales arbitrar, rezultă: $m + n \in \mathbb{N},\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.
Să demonstrăm aceeaşi proprietate şi pentru produs. Avem:
$$m \cdot 0 = 0,\ \ m \cdot 1 = m,\ \ m \cdot n^* = m(n + 1) = m \cdot n + m.$$
Să fixăm un $m \in \mathbb{N}$ şi fie $M = \{n \in \mathbb{N} :\ \ m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Din $m \cdot 0 = 0$ se deduce $0 \in M$, iar din $m \cdot n \in M$ avem
$$m \cdot n^* = m \cdot n + m \in M.$$
Urmează că $n \in M$ implică $n^* \in M$ şi conform principiului inducţiei, $M = \mathbb{N}$. Cum m a fost ales arbitrar, rezultă că:
$$m \cdot n \in \mathbb{N},\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

Observaţie. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $card\ \{1, 2, \ldots, n\} = n$. Cardinalul mulţimii vide este zero: $card\ \emptyset = 0$.

■ Dacă pe o mulţime A se defineşte o lege de compoziţie internă, notată $\star$, spunem că $(A, \star)$ este un *semigrup* (*monoid*) dacă există proprietăţile:
1^o $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c,\ \forall\, a, b, c \in A$ (*asociativitate*);
2^o $\exists\, e \in A$ (numit *element neutru*) a.î. $e \star a = a \star e = a,\ \forall\, a \in A$ (*existenţă element neutru*);
În plus, dacă este satisfăcută şi proprietatea:
3^o $a \star b = b \star a,\ \forall\, a, b \in A$ (*comutativitate*),
monoidul se numeşte *comutativ*.
Pentru a se pune în evidenţă şi elementul neutru, monoidul se mai notează şi $(A, \star, e)$.

Un semigrup $(A, \star, e)$ se numeşte *grup* dacă orice element al acestuia admite un simetric:
4^o $\forall\, a \in A,\ \exists\, a^{-1} \in A$ a.î. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Dacă pe o mulţime A sunt definite două operaţii:
$\oplus: A \times A \to A$ (operaţie *aditivă*) $\otimes: A \times A \to A$ (operaţie *multiplicativă*),
unde $(A, \oplus, 0)$ este monoid comutativ, iar $(A, \otimes, 1)$ monoid şi mai sunt satisfăcute şi proprietăţile:
5^o $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (a \otimes b),\ \forall\, a, b, c \in A$ (*distributivitatea operaţiei multiplicative faţă de cea aditivă*);
6^o $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0,\ \forall\, a \in A$ (0 este *absorbant* pentru operaţia multiplicativă),
atunci $(A, \oplus, \otimes, 0, 1)$ se numeşte *semi-inel* sau *semidomeniu de integritate*.

Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire, definite în exerciţiul anterior, formează un semidomeniu de integritate.

Avem de demonstrat că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$a + (b + c) = (a + b) + c,\ a + 0 = a,\ a + b = b + a;$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,\ a \cdot 1 = a,\ a \cdot b = b \cdot a;$

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot b$ şi $a \cdot b = 0 \Rightarrow \ (a = 0 \vee b = 0).$

Cu excepţia ultimei proprietăţi, celelalte au fost demonstrate fie la operaţiile cu numere cardinale (Ex. 0.2.6, 0.2.7) sau în exerciţiul anterior.
Pentru a demonstra ultima proprietate, se observă că produsul cartezian a două mulţimi este vid dacă şi numai dacă nua din mulţimi este vidă.

■ Dacă $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $m \leq n$ dacă şi numai dacă există un număr $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m + p = n$.

Fie $m = \overline{\overline{M}} \leq n = \overline{\overline{N}}$. Inegalitatea cardinalilor revine la existenţa unei bijecţii $f: M \to M' \subset N$. Vom pune în evidenţă mulţimea $P = N \setminus M'$ şi cardinalul ei p. Din $P \subset N$ urmează că p este un număr natural iar definiţia adunării numerelor naturale asigură că $m + p = n$.
Să presupunem acum că are loc $m + p = n$. Vom arăta că prin inducţie completă în raport cu p că o astfel de egalitate implică $m \leq n$. Pentru $p = 0$ deducem $n = m + 0 = n$, deci $m \leq n$. Dacă din $m + k = n$ urmează $m \leq n$, egalitatea $m + k^* = r$ devine $(m + k)^* = r$, deci $n^* = r$, adică $n \leq r$. Din $m \leq n$ şi $n \leq r$ urmează $m \leq r$ etc.

Observaţii.
1^o Numărul întreg p, ce există conform teoremei anterioare în ipoteza $m \leq n$, este unic, se notează $n - m$ şi se numeşte *diferenţa numerelor naturale* n, m.
2^o Această teoremă, precum şi următoarea, arată că operaţiile de adunare şi de înmulţire pe $\mathbb{N}$ sunt compatibile cu structura de bună ordonare a acestei mulţimi.

■ Există relaţiile:
1^o $m \leq n \ \Leftrightarrow m + p \leq n + p,\ \forall\, p \in \mathbb{N};$
2^o $m \leq n \ \Leftrightarrow mp \leq np,\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*$
3^o $m \leq mn,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

(S-a notat $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

1^o Din $m \leq n$ şi exerciţiul precedent rezultă $n = m + q,\ q \in \mathbb{N}$. Atunci $n + p = (m + p) + q$. Se aplică din nou teorema precedentă şi rezultă $m + p \leq n + p$.
Reciproc, $m + p \leq n + p \ \Rightarrow \ n + p = (m + r) + p,\ r \in \mathbb{N}$, care prin inducţie implică $n = m + r,\ r \in \mathbb{N}$. Se aplică din nou exerciţiul precedent şi se obţine $m \leq n$.
2^o Demonstraţie similară.
3^o Dacă $n \neq 0$ există p încât $n = p^*$. Rezultă $mn = mn^* = mp + m$ şi deci $m \leq mn$.

Observaţie. Are loc $m = mn$ dacă şi numai dacă $m = 0$ sau $n = 1$.

■ (*Axioma lui* ***Arhimede***). Oricare ar fi $m, p \in \mathbb{N}$, cu $m \neq 0$, există un $n \in \mathbb{N}$ aşa ca $n \cdot m > p$.

Se aplică inducţia după p. Se observă că pentru $p = 0$ proprietatea este verificată cu $n = 1$. Dacă acum $m \neq 0$ este oarecare fixat şi $p \neq 0$ şi există $n \in \mathbb{N}$ aşa ca $mn > p$, atunci $n^* m > p^*$.

■ (*Teorema împărţirii cu rest în* $\mathbb{N}$). Dacă $m, n\ \mathbb{N}$ cu $m \neq 0$, există două numere naturale unice q (numit *cât*) şi r (numit *rest*) încât $n = mq + r$ şi $r < m$.

Fie $A = \{x :\ \ x \in \mathbb{N} \wedge mx \leq n\}$. Conform teoremei precedente, $A \subseteq \mathbb{N}$. Are loc $0 \in A$ şi pentru a nu ajunge prin inducţie la concluzia $A = \mathbb{N}$ trebuie să existe un $q \in A$ astfel încât $q^* \notin A$. Din $q \in A$ rezultă existenţa unui r astfel încât $mq + r = n$. Deoarece $q^* \notin A$ rezultă $m(q + 1) > mq + r$ deci $r < m$.
Pentru a dovedi unicitatea lui (q, r) se va presupune că există şi $(h, k) \neq (q, r)$ încât $n = mh + k$ şi $k < m$. Urmează $h \in A,\ \ h^* \notin A$. Dacă, de exemplu, $h < q$ urmează $h^* \leq q$ şi deci $mh^* \leq mq \leq n$ în contradicţie cu $h^* \notin A$. Analog, din $q < h$ am contrazice $q^* \notin A$. Deci $h = q$. Urmează $n = mq + r = mq + k$ deci $r = k$.

■ Se defineşte o relaţie binară $\sim$ pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel:

$$(m,n) \sim (m_1,n_1) \Leftrightarrow m+n_1 = m_1+n.$$
Relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Mulţimea claselor sale de echivalenţă va fi numită *mulţimea numerelor întregi* şi se va nota:
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} /\sim .$$

Într-adevăr, $(m,n) \sim (m\,,n)$ deoarece $m+n=n+m$.
Din $(m,n) \sim (m_1,n_1) \Rightarrow (m_1,n_1) \sim (m,n)$, deoarece $m+n_1 = m_1+n \Rightarrow m_1+n = m+n_1$.
De asemenea, avem $[(m,n) \sim (m_1,n_1) \wedge (m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)] \Rightarrow (m,n) \sim (m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$

■ Au loc proprietăţile:
1^o $(m,m) \sim (0,0),\ \forall\, m \in \mathbb{N}$;
2^o $(m,n) \sim (m-n,\ 0)$, pentru $m > n$;
3^o $(m,n) \sim (0,\ n-m)$, pentru $n > m$.

Demonstraţiile sunt simple.

■ Dacă $(m,n) \sim (m_1,n_1),\ (p,q) \sim (p_1,q_1)$, atunci:
1^o $(m+p, n+q) \sim (m_1+p_1,\ n_1+q_1)$;
2^o $(mq+nq,\ mq+np) \sim (m_1p_1+n_1q_1,\ m_1q_1+n_1p_1)$.

Din $m+n_1 = m_1+n,\ p+q_1 = p_1+q$ rezultă c $m+p+n_1+q_1 = m_1+p_1+n+q$. Analog se demonstrează a doua afirmaţie.

■ Aplicaţiile $+ : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ şi $\cdot : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, definite prin:
$$(m,n)+(p,q) = (m+p,\ n+q);$$
$$(m,n)\cdot(p,q) = (mp+nq,\qquad mq+np)$$
nu depind de reprezentanţii aleşi ai numerelor întregi respective.

Se aplică teorema precedentă.

Observaţie. Din teoremele anterioare rezultă că $+$ şi $\cdot$ sunt operaţii binare pe mulţimea $\mathbb{Z}$ şi pe care le vom numi *adunarea* şi *înmulţirea* numerelor întregi.

■ Dacă $A(\oplus,\otimes,0,1)$ este un inel, spunem că elementul $x \in A \setminus \{0\}$ este *divizor al lui zero* dacă $\exists\ y \in A \setminus \{0\}$ a.î. $x \otimes y = y \otimes x = 0$.
Un inel cu element-unitate, comutativ şi fără divizori ai lui zero se numeşte *domeniu de integritate*.

Mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire, formează un domeniu de integritate.

1^o $(\mathbb{Z},+)$ *este grup abelian*.
Într-adevăr, $(m,n)+[(p,q)+(r,s)] = (m,n)+(p+r,q+s) = [(m,n)+(p,q)]+(r,s)$. Elementul neutru este: $(0,0)$: $(m,n)+(0,0) = (m,n)$. Opusul $-(m,n)$ al numărului (m,n) este (n,m) deoarece: $(m,n)+(n,m) = (m+n,m+n) = (0,0)$. În fine, $(m,n)+(p,q) = (m+p,\ n+q) = (p,q)+(m,n)$.
2^o $(\mathbb{Z},\cdot)$ *este semigrup cu unitate, comutativ*.
$$[(m,n)\cdot(p,q)]\cdot(r,s) = (mp+nq,mq+np)\cdot(r,s) =$$
$$= (mpr+nqr+mqs+nps,\ mps+nqs+mqr+npr) = (m,n)\cdot[(p,q)\cdot(r,s)].$$
$(1,0)$ este unitate: $(m,n)\cdot(1,0) = (m,n)$.
În fine, $(m,n)\cdot(p,q) = (mp+nq,mq+np) = (p,q)\cdot(m,n)$.
3^o *Înmulţirea este distributivă faţă de adunare*: $(m,n)\cdot[(p,q)\cdot(r,s)] = (m,n)\cdot(p+r,q+s) =$
$= (mp+mr+nq+ns,\ mq+ms+np+nr) = (m,n)\cdot(p,q)+(m,n)\cdot(r,s)$.
4^o *Absenţa divizorilor lui zero*. Fie $(m,n)\cdot(p,q) = (0,0)$; dacă $(m,n) \neq (0,0)$ are loc $m \neq n$.
Fie $(m,n)\cdot(p,q) = (0,0)$; dacă $(m,n) \neq (0,0)$ are loc $m \neq n$. Să presupunem că de exemplu $m > n$, deci există $r \neq 0$ încât $m = n+r$ şi deci $(m,n) = (r,0)$. Egalitatea iniţială devine $(r,0)\cdot(p,q) = (0,0)$, adică $rp = rq$. Urmează $p = q$, adică $(p,q) = (0,0)$.

■ Pentru simplificare, vom nota $(0,0) = 0$, $\mathbb{Z}_+ = \{(m,n)\colon\ m > n\}$ (numită *mulţimea numerelor întregi pozitive*) şi $\mathbb{Z}_- = \{(m,n)\colon\ m < n\}$ (*mulţimea numerelor întregi negative*).

1^o $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$;
2^o $\forall\ (m,n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m,n)$ aparţine uneia şi numai uneia dintre mulţimile: $\mathbb{Z}_-, \{0\}, \mathbb{Z}_+$.

1^o Afirmaţie evidentă, conform definiţiei mulţimilor $\mathbb{Z}_-, \{0\}, \mathbb{Z}_+$.
2^o Fie $(m,n) \in \mathbb{Z}$. Dacă $(m,n) \sim (m',n')$ şi $m > n$, atunci $m' > n'$, deoarece $m + n' = n + m'$ şi
$$m + n' > n + n' \ \Rightarrow\ n + m' > n + n' \Rightarrow m' > n'.$$
Prin urmare proprietatea $m > n$ de depinde de reprezentanţii m, n. Aplicând trihotomia numerelor naturale, avem sau $m > n$ şi atunci $(m,n) \in \mathbb{Z}_+$, sau $m = n$ şi atunci $(m,n) = 0$, sau $m < n$ şi atunci $(m,n) \in \mathbb{Z}_-$, dar numai una dintre relaţii poate avea loc.

■ Operaţia de adunare, $+$, din $\mathbb{Z}$ induce pe $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ o operaţie notată tot $+$, iar operaţia de înmulţire pe $\mathbb{Z}$ induce pe $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ o operaţie notată tot $\cdot$; tripletul $(\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, +, \cdot)$ este un semidomeniu de integritate.

Într-adevăr, $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ este parte stabilă în raport cu $+$ şi cu $\cdot$. Atunci restricţiile operaţiilor $+$ şi $\cdot$ la această submulţime dau o structură de semidomeniu de integritate.

■ Vom spune că numărul întreg (m,n) este *mai mic* decât numărul întreg (p,q) dacă diferenţa $(p,q) - (m,n) \in \mathbb{Z}_+$. Vom nota această relaţie prin semnul $<$ şi vom scrie $(m,n) \leq (p,q)$ dacă $(m,n) < (p,q)$ sau $(m,n) = (p,q)$.

Mulţimea $(\mathbb{Z}, \leq)$ este total ordonată.

Avem, evident, $(m,n) \leq (m,n)$; $(m,n) \leq (p,q)$, $(p,q) \leq (r,s) \Rightarrow (m,n) \leq (r,s)$. Fie acum $(m,n), (p,q) \in \mathbb{Z}$. Conform 0.2.34, $(p,q) - (m,n)$ aparţine uneia şi numai uneia dintre mulţimile: $\mathbb{Z}_-, \{0\}, \mathbb{Z}_+$. Dacă acest număr aparţine lui $\mathbb{Z}_+$, atunci $(m,n) < (p,q)$. Dacă este zero, atunci $(m,n) = (p,q)$. În fine, dacă el este în $\mathbb{Z}_-$, atunci $(p,q) < (m,n)$ şi numai una din aceste situaţii are loc.

■ Fie $(A, +, \cdot)$, $(B, +, \cdot)$ două inele. O aplicaţie $f\colon A \to B$ cu proprietăţile:
1^o $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall\ x, y \in A$;
2^o $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\ x, y \in A$,
se numeşte *morfism de inele*.

Un morfism de inele se numeşte *izomorfism de inele* dacă este inversabil şi inversa este de asemenea morfism de inele.

Mulţimea $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ este bine ordonată prin relaţia $\leq$. Mai mult:
1^o Există o asemănare unică f a mulţimilor ordonate $(\mathbb{N}, \leq)$ şi $(\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, \leq)$.
2^o f este un izomorfism al semidomeniilor de integritate $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, +, \cdot)$.

În primul rând să arătăm că $(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ dacă şi numai dacă există $p \in \mathbb{N}$ încât $(m,n) = (p,0)$.
Într-adevăr, $(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow m \geq n \ \Rightarrow \exists\ p \in \mathbb{N};\ \ m + p = n$. Atunci $(m,n) \sim (p,0)$.
Invers, $(p,0) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ şi $(m,n) = (p,0)$ aparţine acestei mulţimi.
Acum avem $(m,0) \leq (p,0) \Leftrightarrow m \leq p$.
Aplicaţia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $f(m) = (m,0)$ este o bijecţie care are proprietatea$m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$. Deci f este o asemănare. Din 0.2.15 rezultă că această asemănare este unică.
2^o Se observă că: $f(m + n) = (m + n,\ 0) = (m,0) + (n,0) = f(m) + f(n)$ şi $f(m \cdot n) = (mn, 0) = (m,0) \cdot (n,0) = f(m) \cdot f(n)$.

Observaţie. Prin izomorfismul indicat anterior, $\mathbb{N}$ apare ca o submulţime a lui $\mathbb{Z}$, deci $\mathbb{Z}$ poate fi concepută ca o extensie a lui $\mathbb{N}$. Teorema care urmează dezvăluie faptul că această extensie este *minimală*.

■ Fie $(A, +, \cdot)$, $(B, +, \cdot)$ două inele. Un morfism $f\colon A \to B$ se numeşte *(h)omomorfism* dacă:
$f(1_A) = 1_B$,
unde $1_A, 1_B$ sunt elementele unitare pentru fiecare din cele două operaţii multiplicative.

Dacă $\mathbb{V} = (V, \oplus, \circ)$ este un inel, $\mathbb{N} \subset V$ şi restricţiile operaţiilor $\oplus$ şi $\circ$ la $\mathbb{N}$ coincid cu operaţiile de adunare şi înmulţire ale numerelor naturale, atunci există un homomorfism injectiv h de la inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ al întregilor la $\mathbb{N}$.

Demonstraţia este imediată punând $h\big((m,n)\big) = m \oplus (-n)$, unde $-n$ este opusul lui n în $\mathbb{N}$.

■ Inelul $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, ordonat prin $\leq$, este *arhimedian* adică, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}_+$ şi $b \in \mathbb{Z}$, există un număr natural $n \in \mathbb{N}$ încât $na > b$.

Putem considera $a = (m, 0)$ cu $m \neq 0$. Dacă $b = (p, q)$, inegalitatea $na > b$ revine la $nm + q > p$. Dacă $p \leq q$, putem lua $n = 0$. În caz contrar, există h încât $p = q + h$ şi, deoarece $\mathbb{N}$ este arhimediană, vom găsi n încât $nm > h$.

Observaţii.
1^o Deoarece $\mathbb{Z}$ poate fi privit ca o extensie a lui $\mathbb{N}$, putem nota numerele întregi prin litere mici ale alfabetului latin.
2^o În $\mathbb{Z}$ nu există în general inverse în raport cu înmulţirea. În cele ce urmează se va construi o extensie a lui $\mathbb{Z}$ care să aibă această proprietate.

■ Mulţimea cât a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ în raport cu relaţia de echivalenţă $\sim$ o vom numi *mulţimea numerelor raţionale* şi se va nota:
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} /\sim.$$
Clasele de echivalenţă vor fi numite *numere raţionale* şi vor fi notate cu $\langle a, b\rangle$, $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fiind un reprezentant al numărului raţional $\langle a, b\rangle$.

Avem proprietăţile:
1^o $\langle a, b\rangle = \langle ac, bc\rangle,\ \forall c \in \mathbb{Z}^*$;
2^o $\langle a, b\rangle = \langle ac, d\rangle \Rightarrow d = bc$;
3^o $\langle a, a\rangle = \langle 1, 1\rangle$ şi $\langle 0, a\rangle = \langle 0, 1\rangle,\ \forall\, a \in \mathbb{Z}^*$;
4^o $[\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \ \wedge a \neq 0\,] \Rightarrow [c \neq 0 \ \wedge\ \langle b, a\rangle = \langle d, c\rangle]$.

Pentru demonstraţie, se utilizează teorema precedentă.

■ Dacă au loc $(a, b) \sim (a', b')$ şi $(c, d) \sim (c', d')$, atunci:
1^o $(ad + bc\,,\ bd) \sim (a'd' + b'c',\ b'd')$;
2^o $(ac, bd) \sim (a'c', b'd')$.

1^o $(ab' = a'b \wedge cd' = c'd) \Rightarrow ab'dd' + cd'bb' = a'bdd' + c'dbb' \Rightarrow (ad + bc,\ bd) \sim (a'd' + b'c',\ b'd')$.
2^o $(ab' = a'b \wedge cd' = c'd) \Rightarrow acb'd' = a'c'bd \Rightarrow (ac, bd) \sim (a'c', b'd')$.

■ Aplicaţiile $+ :\ \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ şi $\cdot :\ \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ definite prin $\langle a, b\,\rangle + \langle c, d\rangle = \langle ad + bc,\ bd\rangle$, respectiv $\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle\langle ac, bd\rangle$, nu depind de reprezentanţii $(a, b), (c, d)$ ai numerelor raţionale $\langle a, b\,\rangle$, respectiv $\langle c, d\rangle$.

Se aplică teorema anterioară.

Observaţie. Din această teoremă rezultă că $+$ şi $\cdot$ sunt operaţii pe $\mathbb{Q}$. Le numim *adunarea* şi *înmulţirea* numerelor raţionale.

■ Se numeşte *corp* un triplet $(A,+,\cdot)$, unde $+$ este operaţia aditivă, iar $\cdot$ este operaţia multiplicativă, pentru care:
1^o $(A,+)$ este grup abelian, cu elementul neutru 0;
2^o $(A \setminus \{0\},\cdot)$ este grup cu elementul neutru 1;
3^o Operaţia multiplicativă este distributivă faţă de cea aditivă.
Dacă operaţia multiplictivă este şi comutativă adică:
4^o $x \cdot y = y \cdot x,\ \ \forall\, x, y \in A$,
atunci corpul este *corp comutativ* (*câmp*).

Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale, împreună cu operaţiile de adunare " $+$ " şi înmulţirea " $\cdot$ ", este un corp comutativ.

1^o $(\mathbb{Q},+)$ este un grup abelian:
$$(\langle a, b\,\rangle + \langle c, d\rangle) + \langle e, f\rangle = \langle ad + bc, bd\rangle + \langle e, f\rangle = \langle adf + bcf + bde,\ \ bdf\rangle = \langle a, b\,\rangle + (\langle c, d\rangle + \langle e, f\rangle);$$
$\langle a, b\,\rangle + \langle 0, 1\rangle = \langle a, b\,\rangle$, deci $\langle 0, 1\rangle$ este element neutru al adunării.
Opusul elementului $\langle a, b\,\rangle$ este numărul raţional $\langle -a, b\,\rangle$.
În fine, $\langle a, b\,\rangle + \langle c, d\,\rangle = \langle c, d\,\rangle + \langle a, b\,\rangle$.

2^o $(\mathbb{Q},\cdot)$ este semigrup abelian cu unitate:
$$(\langle a, b\,\rangle \cdot \langle c, d\rangle) \cdot \langle e, f\rangle = \langle ac, bd\rangle \cdot \langle e, f\rangle = \langle abe,\ \ bdf\rangle = \langle a, b\,\rangle \cdot (\langle c, d\rangle \cdot \langle e, f\rangle)$$
$\langle a, b\,\rangle \cdot \langle 1, 1\rangle = \langle a, b\,\rangle$ şi $\langle a, b\,\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle ac, bd\rangle = \langle c, d\rangle \cdot \langle a, b\,\rangle$.

3^o $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{\langle 0, 1\rangle\}$ şi $\cdot$ este grup comutativ:

Avem de arătat că $\langle a,b\rangle \neq \langle 0,1\rangle$ are un invers în raport cu înmulţirea. Dar $\langle a,b\rangle \neq \langle 0,1\rangle \Rightarrow \ a \neq 0$. Atunci $\langle a,b\rangle \cdot \langle b,a\rangle = \langle ab,ab\rangle = \langle 1,1\rangle$, (deoarece $ab \neq 0$). Deci, pentru $a \neq 0$, $\langle a,b\rangle^{-1} = \langle b,a\rangle$.

4^o Înmulţirea este distributivă faţă de adunare:
$(\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle) \cdot \langle e,f\rangle = \langle ad+bc,bd\rangle \cdot \langle e,f\rangle = \langle ade+bce+bde,\ bdf\rangle = \langle a,b\rangle \cdot \langle e,f\rangle + \langle c,d\rangle \cdot \langle e,f\rangle$.

■ Se definesc:

$$\mathbb{Q}_+ = \{\langle a,b\rangle :\ a \in \mathbb{Z}_+, b \in \mathbb{Z}_+\}, \qquad \mathbb{Q}_- = \{\langle a,b\rangle :\ a \in \mathbb{Z}_-, b \in \mathbb{Z}_+\}, \qquad 0 = \langle 0,1\rangle$$

1^o Mulţimile $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-$ şi $\{0\}$ alcătuiesc o partiţie pentru $\mathbb{Q}$;
2^o $\mathbb{Q}_+$ este parte stabilă în $(\mathbb{Q},+)$;
3^o $(\mathbb{Q}_+,\cdot)$ este grup abelian.

Într-adevăr, conform 0.2.41. 1^o, pentru $c=1$, $\langle a,b\rangle = \langle -a,-b\rangle$, deci pentru orice număr raţional $\langle a,b\rangle$ se poate determina un reprezentant (a,b) sau $(-a,-b)$ astfel încât al doilea factor al său să fie pozitiv, deci

$$\mathbb{Q} = \{\langle a,b\rangle :\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_+\}.$$

■ Se spune că numărul raţional $\langle a,b\rangle$ este *mai mic* decât numărul raţional $\langle c,d\rangle$ şi se scrie $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dacă $\langle c,d\rangle - \langle a,b\rangle \in \mathbb{Q}_+$. Se scrie $\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$ dacă $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ sau $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$.

$(\mathbb{Q}_+,+,\cdot)$ este un câmp total ordonat adică:
Mulţimea $(\mathbb{Q},\leq)$ este total ordonată şi relaţia de ordine este compatibilă cu operaţiile de adunare şi înmulţire din $\mathbb{Q}$.

Conform definiţiei, avem $\langle a,b\rangle \leq \langle a,b\rangle$.
Apoi $\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$ şi $\langle c,d\rangle \leq \langle a,b\rangle$, conform exerciţiului anterior, 1^o, implică $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$.
Din $\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$, $\langle c,d\rangle \leq \langle e,f\rangle$ avem $\langle c,d\rangle - \langle a,b\rangle \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$, $\langle e,f\rangle - \langle c,d\rangle \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$, care implică $\langle e,f\rangle - \langle a,b\rangle \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ adică $\langle a,b\rangle \leq \langle e,f\rangle$.
Principiul trihotomiei rezultă imediat aplicând exerciţiul anterior, 1^o.

Acum să demonstrăm că:

(1) $(\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle \ \wedge\ \langle a_1,b_1\rangle \leq \langle c_1,d_1\rangle) \ \Rightarrow\ \langle a,b\rangle + \langle a_1,b_1\rangle \leq \langle c,d\rangle + \langle c_1,d_1\rangle$.

(2) $(\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle \ \wedge\ \langle e,f\rangle \in \mathbb{Q}_+) \ \Rightarrow\ \langle a,b\rangle \cdot \langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle \cdot \langle e,f\rangle$.

Într-adevăr, $\langle c,d\rangle - \langle a,b\rangle \in \mathbb{Q}_+$, $\langle c_1,d_1\rangle - \langle a_1,b_1\rangle \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ implică $\langle c,d\rangle + \langle c_1,d_1\rangle - (\langle a,b\rangle + \langle a_1,b_1\rangle) \in \mathbb{Q}_+$ şi are loc relaţia (1). Le fel se dovedeşte şi (2).

■ Fie $\widetilde{Q} = \{\langle a,1\rangle :\ a \in \mathbb{Z}\}$. Elementele lui $\widetilde{Q}$ se numesc *întregi raţionali*.

$(\widetilde{Q},+,\cdot)$ este domeniu de integritate.

Evident $\emptyset \neq \widetilde{Q} \subset \mathbb{Q}$. Restricţia relaţiei $\leq$ la $\widetilde{Q}$ determină o ordine totală pe $\widetilde{Q}$. De asemenea, se vede uşor că $\widetilde{Q}$ este parte stabilă în raport cu operaţile $+$ şi $\cdot$ din $\mathbb{Q}$.

■ 1^o Mulţimile $(\mathbb{Z},\leq)$, $(\mathbb{Q},\leq)$ sunt asemenea.
2^o Există un izomorfism între domeniile de integritate $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ şi $(\widetilde{Q},+,\cdot)$, care este asemănare.

1^o Fie $f:\mathbb{Z} \to \widetilde{Q}$ aplicaţia dată de $f(a) = \langle a,1\rangle$. Din $f(a) = f(b)$ se deduce $\langle a,1\rangle = \langle b,1\rangle$ deci $a=b$, deci f este injectivă.
Fie $\langle a,1\rangle$ un element oarecare din $\widetilde{Q}$ şi $(a,1)$ un reprezentant al său; atunci $f(a) = \langle a,1\rangle$. Aşadar, f este şi surjectivă, deci este bijectivă.
Să admitem că $a \leq b$; atunci $f(a) \leq f(b)$, deoarece $\langle b,1\rangle - \langle a,1\rangle = \langle b,1\rangle + \langle -a,1\rangle = \langle b-a,1\rangle$ şi $b-a \geq 0$.

2^o Asemănarea precedentă este şi izomorfism, deoarece $f(a+b) = \langle a+b,1\rangle = \langle a,1\rangle + \langle b,1\rangle = f(a)+f(b)$ şi $f(a)\cdot f(b) = \langle a,1\rangle \cdot \langle b,1\rangle = \langle ab,1\rangle$.

Observaţie. În urma acestui rezultat, mulţimile $\mathbb{Z}$ şi $\widetilde{Q}$ pot fi identificate şi $\mathbb{Q}$ apare ca o extensie a domeniului de integritate $\mathbb{Z}$.

■ Orice număr raţional $\langle a,b\rangle \in \mathbb{Q}$ poate fi scris sub formă de produs al unui întreg raţional prin inversul unui întreg raţional.

Fie $\langle a,b\rangle \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Z}_+$. Dacă $\langle a,b\rangle = 0$, atunci $\langle a,b\rangle = \langle 0,b\rangle \cdot \langle b,1\rangle^{-1}$. Dacă $\langle a,b\rangle \neq 0$, atunci $\langle a,b\rangle = \langle a,1\rangle \cdot \langle b,1\rangle^{-1}$.

■ Corpul numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este extensie minimală a domeniului de integritate $\mathbb{Z}$.

Orice alt corp $\mathbb{K}$, ce conţine o submulţime $\widetilde{K}$ izomorfă cu $\mathbb{Z}$, va conţine şi inversele elementelor din $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Conform exerciţiului anterior, K va conţine un subcorp izomorf cu $\mathbb{Q}$ şi atunci $\mathbb{Q}$ se identifică cu un subcorp din K.

■ O mulţime total ordonată $(A, \leq)$ se numeşte *densă* dacă pentru orice $x, y \in A,\ \ x \neq y$, există un $z \in A$ a.î. $x < z < y$ sau $y < z < x$.

$(\mathbb{Q}, \leq)$ este o submulţime total ordonată fără prim sau ultim element, densă.

Caracterul total al ordonării $\leq$ a fost demonstrat în 0.2.41.
Pentru orice $x \in \widetilde{Q}$ se poate găsi $x - \langle 1,1\rangle < x$ şi $x < x + \langle 1,1\rangle$ deci nu poate exista prim sau ultim element.
Fie $x = \langle a, b\rangle$ şi $y = \langle c, d\rangle$ încât $x < y$, adică $ad < bc$. Proprietatea de densitate afirmă existenţa unui $z = (e, f)$ încât $x < z < y$. Se poate lua $z = \frac{1}{2}(x + y) = \langle 1,2\rangle \cdot \langle ad + bc,\ 2bd\rangle$ şi se poat verifica faptul că $x < z,\ \ z < y$.

■ Mulţimea $\mathbb{Q}$ este *arhimediană*, adică pentru orice $\langle a, b\rangle \in \mathbb{Q}_+$ şi $\langle c, d\rangle \in \mathbb{Q}$, există un număr natural nenul $n \in \mathbb{N}^*$astfel încât: $n \cdot \langle a, b\rangle > \langle c, d\rangle$.

Fie numerele întregi $ad > 0$ şi cb. Există $n \in \mathbb{N}^*$ încât $nad > cb$. Atunci $\langle n, 1\rangle \cdot \langle a, b\rangle = \langle n, 1\rangle \cdot \langle ad, bd\rangle = \langle c, d\rangle$.

Observaţii.
1^o Identificăm mulţimile $\mathbb{Z}$ şi $\widetilde{\mathbb{Q}}$: întregii raţionali $\langle a, 1\rangle$ cu a şi inversul lui $\langle b, 1\rangle,\ \ b \neq 0$, cu $\frac{1}{b}$. Atunci:
$\langle a, b\rangle = \langle a, 1\rangle \cdot \langle 1, b\rangle = a \cdot \frac{1}{b}$ se poate nota cu $\frac{a}{b}$. Avem astfel:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},\ \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

2^o După cum s-a demonstrat, câmpul numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este ordonat şi arhimedian. De acum înainte se vor nota elementele sale cu: $a, b, \dots, x, y, \dots, \frac{m}{n},\ \ m \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{N}^*$.
2^o Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine totală pe $\mathbb{Q}$ şi este compatibilă cu operaţiile de pe această mulţime.
Astfel, pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{cases} a < b, c \leq d \ \Rightarrow a + c < b + d; \\ a < b, c > 0 \ \Rightarrow ac < bc; \\ a < b, c < 0 \ \Rightarrow bc < ac; \\ a^2 \in \mathbb{Q}_+, pentru\ a \neq 0; 1 \in \mathbb{Q}_+; \\ ab \in \mathbb{Q}_+, a \in \mathbb{Q}_+ \ \Rightarrow b \in \mathbb{Q}_+ \end{cases}$$

Cu aceleaşi notaţii, pentru $a \in \mathbb{Q}^*$, avem $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}^*$. De asemenea:

$$0 < a < b \ \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

■ Fie funcţia $|\ |: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$, numită *valoare absolută* sau *modul*.

Avem proprietăţile: $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$,
$1^o\ |x| = |-x|$; $2^o\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $3^o\ |x + y| \leq |x| + |y|$ $4^o\ \big||x| - |y|\big| \leq |x| + |y|$.

Pentru a demonstra 3^o, se va ţine seama că: $x \leq |x|, y \leq |y| \ \Rightarrow \ x + y \leq |x| + |y|$. Analog, $-(x + y) \leq |x| + |y|$.

■ Se consideră pe $\mathbb{R}$ operaţiile definite la 0.2.55:
$+: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ \cdot: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde:

$+: (\alpha, \beta) \to \alpha + \beta$ şi $\cdot: (\alpha, \beta) \to \alpha \cdot \beta$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un câmp.

Conform teoremei anterioare, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ este inel comutativ, cu unitate. Mai trebuie demonstrat că orice $\alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ are invers în $\mathbb{R}$ în raport cu înmulţirea.
Fie $\alpha = (a_n) + \mathcal{N} \neq \mathcal{N}$, adică $(a_n) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$. Va trebui să determinăm un şir **Cauchy** (b_n) încât $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$ să aibă proprietatea $\alpha \cdot \beta = \bar{1}$ adică $(a_n b_n) + \mathcal{N} = (1_n) + \mathcal{N}$ sau încă $(a_n b_n) - (1_n) \in \mathcal{N}$.
Cum (a_n) nu este un şir nul, există un număr raţional $e \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât pentru orice $r \in \mathbb{N}^*$, există numere naturale $s > r$ pentru care $|a_n| > e$. Pentru toţi $p, q > N\left(\frac{e}{2}\right)$ avem $|a_p - a_q| < \frac{e}{2}$.
Fie $s > N\left(\frac{1}{2}e\right)$ astfel că $|a_s| \geq e$. Atunci, pentru *p* arbitrar, $p \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$, avem:

$$e \leq |a_s| = |a_s - a_p + a_p| \leq |a_s - a_p| + |a_p| < \frac{1}{2}e + |a_p|.$$

Deci $|a_p| > \frac{e}{2}$, dacă $p \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$. Notăm $m = N\left(\frac{e}{2}\right)$ şi fie $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = 1$ şi $b_p = \frac{1}{a_p}$ dacă $p \geq m$.
Avem: $(a_n b_n) = (a_1, \dots, a_{m-1}, 1, 1, \dots)$ şi deci $(a_n b_n - 1_n) = (a_1 - 1,\ a_2 - 1, \dots,\ a_{m-1} - 1,\ 0, 0, \dots) \in \mathcal{N}$.
Să arătăm acum că şirul$(b_n) \in \mathcal{C}$. Dacă $p, q \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$, atunci:

$$|b_p - b_q| = \left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q}\right| = \frac{1}{|a_p|} \cdot \frac{1}{|a_q|} \cdot |a_p - a_q| < \frac{2}{e} \cdot \frac{2}{e} \cdot |a_p - a_q|.$$

În consecinţă, dacă *c* este arbitrar în $\mathbb{Q}_+$, luând $p, q \geq \max\left\{N\left(\frac{e}{2}\right), N\left(\frac{e^2 \cdot c}{2}\right)\right\}$ avem $|b_p - b_q| < c$.

■ Se spune că elementul $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$ din $\mathbb{R}$ este *pozitiv* şi notăm $\alpha \in \mathbb{R}_+$ dacă există $r \in \mathbb{Q}_+$ şi un număr natural $P(r)$, încât $n > P(r) \Rightarrow a_n > r$.
Se spune că α este *negativ* dacă există $r \in \mathbb{Q}_+$ şi un număr natural $P(r)$, încât $n > P(r) \Rightarrow a_n < -r$; notăm acum $\alpha \in \mathbb{R}_-$.

1^o $\mathbb{R}_+$ şi $\mathbb{R}_-$ sunt submulţimi disjuncte ale lui $\mathbb{R}$.
2^o $\alpha \in \mathbb{R}_- \Rightarrow\ -\alpha \in \mathbb{R}_+$;
3^o $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-) = \{\bar{0}\}$;
4^o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$ şi $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+$.

Demonstraţiile decurg pe baza definiţiei.

Observaţie. Se observă că definiţiile pentru număr real pozitiv şi negativ sunt independente de reprezentantul (a_n) pentru $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ Să se demonstreze următoarele:
1^o $\alpha^2 \in \mathbb{R}_+,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{\bar{0}\}$;
2^o $\bar{1} \in$ ℝ_+ ;
3^o $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \beta \in \mathbb{R}_+$.

1^o Dacă $\alpha \in \mathbb{R}_+$, atunci $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \in \mathbb{R}_+$, dacă $\alpha \in \mathbb{R}_-$, atunci $-\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $(-\alpha) \cdot (-\alpha) = \alpha^2 \in \mathbb{R}_+$.
2^o $\bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+$.
3^o Dacă $\beta \notin \mathbb{R}_+$, putem avea $\beta = \bar{0}$ şi $\alpha \cdot \beta \notin \mathbb{R}_+$ sau $\beta \in \mathbb{R}_-$ şi $-\beta \in \mathbb{R}_+$, astfel că $\alpha(-\beta) = -(\alpha \cdot \beta) \in \mathbb{R}_+$, contrar ipotezei.

■ Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ scriem $\alpha < \beta$ dacă $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $\alpha \leq \beta$ dacă $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$. Astfel se introduce relaţia binară $\leq$ pe $\mathbb{R}$.

Mulţimea $(\mathbb{R}, \leq)$ este total ordonată şi relaţia de ordine $\leq$ este compatibilă cu operaţiile din câmpul $\mathbb{R}$.

Avem $\alpha \leq \alpha$ conform definiţiei. Dacă $\alpha \leq \beta,\ \beta \leq \alpha$, avem $\alpha = \beta$. În caz contrar, $\alpha < \beta, \beta < \alpha$ şi $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+, -(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$, ceea ce este absurd.
Proprietatea de tranzitivitate este imediată.
Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; atunci $\beta + \alpha$ este în $\mathbb{R}_+$, în $\{\bar{0}\}$ sau în $\mathbb{R}_-$ şi numai una din aceste mulţimi, deci avem $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ sau $\beta < \alpha$ şi numai una dintre aceste relaţii. Aşadar, $(\mathbb{R}, \leq)$ este o mulţime total ordonată.
Să arătăm acum că:

$$\alpha < \beta,\ \gamma \leq \delta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta,$$
$$\alpha < \beta,\ \gamma > \bar{0}\ \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma.$$

Într-adevăr, din $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \delta - \gamma \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ rezultă $\beta + \delta - (\alpha + \gamma) \in \mathbb{R}_+$.
De asemenea, $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \gamma \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (\beta - \alpha)\gamma = \beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \gamma \in \mathbb{R}_+$.
Aşadar, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ este un câmp ordonat.

■ Câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ conţine un subcâmp asemenea cu câmpul numerelor raţionale $\mathbb{Q}$.

Mai întâi se observă că $n \cdot \bar{1} \neq \bar{0},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, $\bar{1} + \bar{1} + \cdots + \bar{1} = n \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+$.
Aşadar $\mathbb{R}$ este de caracteristică zero.
Considerăm aplicaţia $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definită prin $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m \cdot \bar{1}) \times (n \cdot \bar{1})^{-1} \cdot f$ este morfism de grupuri, deoarece:

$$f\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{mq + pn}{nq}\right) = [(mq + pn)\bar{1}] \cdot [(nq)\bar{1}]^{-1} =$$

$$= (m \cdot \bar{1})(n \cdot \bar{1})^{-1} + (p \cdot \bar{1})(q \cdot \bar{1})^{-1} = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right).$$

În mod analog, $f\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$.
Dacă arătăm că f este aplicaţie injectivă, va rezulta că imaginea lui $\mathbb{Q}$ prin f este subcâmp în $\mathbb{R}$. În acest scop este uficient să arătăm că f are proprietatea $(m) = f(n) \Rightarrow m = n$ numai pentru întregi raţionali. Dar $f(m) = f(n) \Rightarrow m \cdot \bar{1} = n \cdot \bar{1} \ \Rightarrow m = n$.
Aşadar, $f: \mathbb{Q} \to f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ este izomorfism de câmpuri. Să arătăm că f este asemănare. În acest scop să observăm că pentru $\frac{m}{n}, m > 0, n > 0$ avem $\frac{m}{n} > 0$ şi $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m \cdot \bar{1}) \cdot (n \cdot \bar{1})^{-1}$ cu $m \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+,\ n \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+$. Deci $f\left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{R}_+$. Dacă $a < b$ în $\mathbb{Q}$, atunci $b - a \in \mathbb{Q}_+$ şi $f(b-a) = f(b) - f(a) \in \mathbb{R}_+$, deci $f(a) < f(b)$.

Observaţie. Pe baza acestei teoreme putem nota: $\bar{a} = f(a),\ \forall a \in \mathbb{Q}$.

■ Câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ este arhimedian adică prezintă *proprietatea lui* ***Arhimede***:
Dacă $\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $\beta \in \mathbb{R}$ sunt două numere reale, există un $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $n \cdot \alpha > \beta$.

Dacă $\beta < \alpha$, atunci existenţa lui *n* este evidentă.
Fie $\bar{0} < \alpha < \beta$. Se vede uşor că există $e \in \mathbb{Q}_+$ aşa ca $\bar{e} = (e, e, \dots,) + \mathcal{N}$ are proprietatea $0 < e < \alpha$. Fie $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$. Şirul (b_n) fiind mărginit, există $d \in \mathbb{Q}$ încât $\beta < \bar{d}$. Numerelor raţionale $e > 0$ şi d le putem aplica axioma lui **Arhimede**: există $n \in \mathbb{N}^*$ încât $ne > d$; urmează $n\bar{e} > \bar{d}$. Atunci $n\alpha > n\bar{e} > \bar{d} > \beta$.

Altă demonstraţie. Presupunem că nu există un astfel de n. Atunci, notând $A = \{nx : \ n \in \mathbb{N}\}$, obţinem că A este majorată (de y), deci, conform axiomei de completitudine, admite un cel mai mic majorant M. Din teorema de caracterizare a marginii superioare, aplicată pentru $\varepsilon = x$, obţinem că există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > M - x$. Cum x_ε este un element al lui A, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_\varepsilon = nx$, deci $nx > M - x$ şi atunci $(n+1)x > M$, contradicţie.

■ Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{Z}$ unic determinat astfel ca $n \leq x < n + 1$.

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $n = x$ Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ şi $x > 0$, atunci considerând în axioma lui **Arhimede** $\alpha = 1$, rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x < n$. Fie n_x cel mai mic număr natural mai mare ca x şi fie $n = n_x - 1$. Se verifică imediat că:

$$n \leq x < n + 1.$$

Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ şi $x > 0$, atunci $-x > 0$ şi se repetă raţionamentul precedent pentru $-x$ şi se ia $n = -n_x$.

Observaţie. Pentru $x \in \mathbb{R}$ dat, numărul întreg definit mai sus se numeşte *partea întreagă a lui* x şi se notează $[x]$. Notând şi $\{x\} = x - [x]$ *partea fracţionară a lui* x, următoarele proprietăţi sunt adevărate pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$[x] \leq x < x + 1\,,\ \ [x] + \{x\} = x\,,\ \ 0 \leq \{x\} < 1.$$

■ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt două numere fixate, $a < b$, atunci există un număr raţional $r \in \mathbb{Q}$ astfel ca $a < r < b$.

Se aplică proprietatea lui **Arhimede** pentru $x = 1$ şi $y = \frac{1}{b-a}$. Se obţine că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $n > \frac{1}{b-a}$. Atunci $\frac{1}{n} < b - a$.
Fie $r = \frac{[na]+1}{n}$. Evident $r \in \mathbb{Q}$ iar:

$$r > \frac{na - 1 + 1}{n} = a\,.$$

Cum $r \leq \frac{na+1}{n}$, avem că:

$$r \leq a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b,$$

deci $a < r < b$.

■ Se spune că şirul $(a_n) \in \mathbb{Q}$ are *limita* $b \in \mathbb{Q}$ şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ sau $a_n \to b$, dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ încât $|a_n - b| < \varepsilon$, pentru toţi $n \geq N(\varepsilon)$.

Orice şir de numere raţionale, care are limită, este şir **CAUCHY**.

Demonstraţia este elementară.

Observaţii.
1^o Se construiesc uşor exemple de şiruri **CAUCHY** de numere raţionale care nu au limită. Din acest motiv se spune despre $\mathbb{Q}$ că nu este "complet".
2^o Noţiunile de valoare absolută, şir **CAUCHY** şi de şir cu limită se extind imediat la $\mathbb{R}$. Cu noţiunile astfel extinse, se formulează teorema următoare.

■ Câmpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale este "complet" adică orice şir **CAUCHY** de numere reale admite limită în $\mathbb{R}$.

Fie (α_p) un şir **CAUCHY** în $\mathbb{R}$. Pentru fiecare indice *p* fixat din $\mathbb{N}^*$, α_p este deci un număr real pentru care putem alege un reprezentant $(a_{p,n})$, şir **CAUCHY** în $\mathbb{Q}$. Să considerăm acum pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ numărul raţional $b_n = a_{n,m}$. Pe baza unor detalii tehnice pe care le omitem, constatăm că şirul (b_n) de numere raţionale este **CAUCHY** şi reprezintă deci un număr real β. Se demonstrează în final că are loc $\lim_{p\to\infty} \alpha_p = \beta$.

Observaţii.
1^o Aplicând câmpului $\mathbb{R}$ aceeaşi construcţie pe care am aplicat-o lui $\mathbb{Q}$ ca să obţinem $\mathbb{R}$, se determină un câmp $\overline{\mathbb{R}}$, care însă este asemenea cu $\mathbb{R}$. Urmează că extensia lui $\mathbb{Q}$, obţinută pe calea indicată anterior, este unică până la un izomorfism.
2^o O consecinţă a acestei teoreme este rezultatul numit *axioma marginii superioare*:
Orice submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$ posedă un cel mai mic majorant.

■ Se defineşte *mulţimea numerelor complexe* ca fiind:
$\mathbb{C} = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{R}\}$, cu proprietatea $i^2 = -1$
şi pentru care operaţiile de adunare şi de înmulţire se definesc astfel:
$\forall\, z_1 = a_1 + ib_1,\ \ z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$,
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1).$$
$\{\mathbb{C}, +, \cdot\}$ este câmp.

Se demonstrează uşor că $\mathbb{C}$ este inel comutativ cu unitate. Mai trebuie dovedit că pentru orice $a + ib \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, unde $0 = 0 + i \cdot 0$, există un invers şi acesta este din $\mathbb{C}$.
Se poate demonstra că acesta este $\frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$.

Observaţie. Pentru numărul complex $z = a + ib \in \mathbb{C}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, *a* se numeşte *partea reală*, iar *b* se numeşte *partea imaginară* a numărului complex considerat.

■ Câmpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe conţine un subcâmp izomorf cu câmpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale.

Aplicaţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin $f(a) = a + 0 \cdot i$ are proprietăţile:
$$f(a + b) = f(a) + f(b), \qquad f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$
şi este injectivă.

■ Nu există o relaţie de ordine totală pe $\mathbb{C}$ compatibilă cu operaţiile din $\mathbb{C}$.

Dacă se presupune că ar exista o astfel de relaţie, pe care o notăm cu $\leq$, atunci avem fie $0 < i$ sau $i < 0$.
Cum $\leq$ este compatibilă cu operaţiile, din $0 < i$ rezultă $i \cdot 0 < i^2$ sau $0 < -1$, ceea ce este absurd deoarece restricţia lui $\leq$ la numerele de forma $a + 0 \cdot i$ dă relaţia de totală ordonare pe $\mathbb{R}$.
Dacă $i < 0$, atunci $-i > 0$ şi $(-i) \cdot (-i) > 0 \ \Rightarrow\ -1 > 0$, de asemenea absurd.

■ Mulţimea $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este un câmp algebric închis, adică orice ecuaţie algebrică cu coeficienţi din $\mathbb{C}$ are rădăcinile în $\mathbb{C}$.

Pentru numere complexe detalii aici.

Mulţimi de numere. Exerciţii

■ Ecuaţia $x^2 = 2$ nu admite soluţii în $\mathbb{Q}$.

Presupunem prin absurd că există $\frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{n^2}{k^2} = 2$. Putem admite că fracţia $\frac{n}{k}$ este ireductibilă deoarece în caz contrar o putem înlocui cu fracţia rezultată în urma simplificării cu cel mai mare divizor comun al lui n şi k. Din relaţia $\frac{n^2}{k^2} = 2$ scrisă sub forma $n^2 = 2k^2$ rezultă că n trebuie să fie divizibil cu 2. Punând $n = 2m$ în $n^2 = 2k^2$ se obţine relaţia $2m^2 = k^2$ din care rezultă că k trebuie să fie divizibil cu 2, ceea ce este în contradicţie cu ireductibilitatea fracţiei $\frac{n}{k}$.

Topologie pe $\mathbb{R}$

■ **0.3..** Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale mulţimii numerelor reale:
1^o $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \le y \iff -y \le -x$;
2^o $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \iff -x \le 0$;
3^o $\forall\, x, y, x_1, y_1 \in \mathbb{R},\ x \le x_1 \wedge y \le y_1 \Rightarrow x + y \le x_1 + y_1$;
4^o $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \le 0 \wedge y \le 0 \Rightarrow x \cdot y \ge 0$;
5^o $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ x \le y \wedge\ \ z \le 0 \Rightarrow x \cdot z \ge y \cdot z$.

1^o Fie $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \le y$. Adunând în ambii membri $(-x)$ avem:
$$x + (-x) \le y + (-x) \Rightarrow 0 \le y - x.$$
Adunând apoi în cei doi membri $(-y)$, se obţine:
$$-y \le y - x + (-y) \Rightarrow\ -y \le -x.$$
În mod similar se demonstrează şi implicaţia inversă.
2^o Fie $x \in \mathbb{R},\ 0 \le x$. Adunând elementul $(-x)$ în ambii membri ai inegalităţii de mai sus, se obţine:
$$-x \le x + (-x) \Rightarrow\ -x \le 0.$$
În mod similar se demonstrează şi cealaltă implicaţie.
3^o Fie $x, y, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ cu $x \le x_1$ şi $y \le y_1$. În prima inegalitate adunăm y, iar în cea de-a două adunăm x_1 şi se obţine:
$x + y \le x_1 + y$ şi $y + x_1 \le y_1 + x_1 \iff x_1 + y \le x_1 + y_1$.
Din tranzitivitatea relaţiei de ordine avem: $x + y \le x_1 + y_1$.
4^o
5^o

■ Fie $X(\le)$ o mulţime ordonată şi o submulţime $A \subseteq X$. Vom spune că $M \in X$ (respectiv $m \in X$) este un *majorant* (respectiv *minorant*) al mulţimii A dacă $x \le M$ (respectiv $m \le x$), $\forall\, x \in A$.
O mulţime care posedă majoranţi şi minoranţi se numeşte *mărginită*.

Orice submulţime nevidă minorată a lui $\mathbb{R}$ posedă margine inferioară.

Mulţimea $A \subseteq \mathbb{R},\ A \ne \emptyset$, fiind minorată, rezultă că $(-A)$ este majorată şi se aplică axioma marginii superioare:
Există $\sup(-A)$ cu proprietăţile:
$$\begin{cases} a)\ -a \le \sup(-A),\ \ \forall\, a \in A \\ \\ b)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, (-a_\varepsilon) \in (-A)\ \ a.\hat{\imath}.\ \ (-a_\varepsilon) > \sup(-A) - \varepsilon \end{cases}$$
$$\begin{cases} a')\ a \ge -\sup(-A),\ \ \forall\, a \in A \\ \\ b')\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, a_\varepsilon \in A\ \ a.\hat{\imath}.\ \ a_\varepsilon < -\sup(-A) + \varepsilon \end{cases}$$
Din *a'*) şi *b'*) rezultă $\exists \inf A = \ -\sup(-A)$.

Corolar. Orice mulţime mărginită de numere reale posedă (în $\mathbb{R}$) margine superioară şi margine inferioară.

■ (*Teorema de caracterizare a marginii superioare a unei mulţimi*). Fie o mulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$. Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A dacă şi numai dacă:
1^o $\quad x \le \alpha\ ,\ \forall\, x \in A$.

2^o $\quad \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, x_\varepsilon \in A\ \ a.\hat{\imath}.\ x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon.$

(*Teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi*). Fie o mulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$. Un număr $\beta \in \mathbb{R}$ este margine inferioară a mulţimii A dacă şi numai dacă:

1^o $\quad \beta \leq x\,,\ \forall\, x \in A.$

2^o $\quad \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, x_\varepsilon \in A\ \ a.\hat{\imath}.\ x_\varepsilon > \beta + \varepsilon.$

În cazul teoremei de caracterizare a marginii superioare, se demonstrează pe rând:

" $\Rightarrow$ " Dacă $\alpha = \sup M$, atunci α este majorant, deci $x \leq \alpha\,,\ \forall\, x \in A$. Cum α este cel mai mic majorant, $\alpha - \varepsilon$ nu este majorant, deci există măcar un $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.

" $\Leftarrow$ " Conform 1., A este majorată (de α), deci, conforma axiomei de completitudine, A admite o margine superioară; fie aceasta M. Deoarece M este cel mai mic majorant, $M \leq \alpha$.

Presupunem prin reducere la absurd că $M < \alpha$. Atunci, notând $\varepsilon = \alpha - M$, obţinem că există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > \alpha - (\alpha - M) = M$, deci M nu este majorant, contradicţie. Urmează deci că $M = \alpha$.

În mod similar se demonstrează teorema de caracterizare a marginii inferioare.

Observaţie. Teorema de caracterizare a marginii superioare (respectiv inferioare) a unei mulţimi descrie caracteristica acesteia de a fi cel mai mic majorant (respectiv cel mai mare minorant) prin intermediul a două inegalităţi, prima precizând faptul că marginea superioară este majorant (respectiv marginea inferioară este minorant), iar cea de-a doua faptul că niciun număr mai mic (respectiv mai mare) decât marginea superioară (respectiv inferioară) nu este majorant (respectiv minorant).

■ **0.3..** Mulţimea $\mathbb{Q}$ este densă în sensul ordinii pe $\mathbb{R}$.

Fie $a, b \in \mathbb{Q}$ cu $a < b$. Trebuie să arătăm că există un $c \in \mathbb{Q}$ a.î. $a < c < b$. Luăm $c = \frac{a+b}{2}$.

■ **0.3..** Orice număr real este egal cu marginea superioară a mulţimii numerelor raţionale mai mici decât acesta.

Trebuie să demonstrăm că $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat şi $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$. Pentru elementul $(-x) \in \mathbb{R}$, conform axiomei lui **Arhimede**, există un $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $n_0 > -x$, ceea ce este echivalent cu $-n_0 < x$.

Deoarece $n_0 \in \mathbb{N}$ rezultă că $(-n_0) \in \mathbb{N}$ rezultă că $(-n_0) \in \mathbb{Z}$ deci $(-n_0) \in A$, adică $A \neq \emptyset$. Mulţimea *A* fiind majorată (*x* este un majorant) conform axiomei marginii superioare, rezultă că există un $\alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha = \sup A\,,\ (\alpha \leq x)$. Prin reducere la absurd, presupunem că $\alpha \neq x$, adică $\alpha < x$, ceea ce este echivalent cu $x - \alpha > 0$. Conforma problemei anterioare, există un $s \in \mathbb{Q}$ a.î. $0 < s < x - \alpha$. Din teorema de caracterizare a marginii superioare, pentru $\varepsilon = s$, rezultă existenţa unui element $r_s \in A$ a.î. $r_s > \alpha - s$, ceea ce este echivalent cu $r_s + s > \alpha$.

Din relaţia $r_s + s < \alpha + (x - \alpha) = x$ şi $r_s + s \in \mathbb{Q}$ rezultă că $r_s + s \in A$ deci $r_s + s \leq \alpha$, inegalitate opusă celei obţinute mai sus. Deci presupunerea făcută este falsă. Rezultă că $\alpha = x$ deci $x = \sup A$.

■ **0.3..** Se numeşte *interval deschis* în $\mathbb{R}$ o mulţime $I \subseteq \mathbb{R}$ de forma:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, unde $a, b \in \mathbb{R},\ \ a < b$,

iar *intervalul închis* este o mulţime de forma:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

În mod similar se definesc *intervalele semideschise*:

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},\ [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Dacă $a, b \in \mathbb{R},\ \ a < b$, atunci:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ \ x = (1 - \lambda)a + \lambda b,\ \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Fie $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$ cu $0 \leq \lambda \leq 1$. Atunci $x = a + \lambda(b - a)$ şi cum $0 \leq \lambda(b - a) \leq b - a$, avem $a \leq x \leq a + (b - a) = b$, deci $x \in [a, b]$.

Reciproc, dacă $x \in [a, b]$, punem $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$. Atunci $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 - \lambda = \frac{b-x}{b-a}$ şi avem:

$$(1 - \lambda)a + \lambda b = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b = x.$$

■ **0.3..** Se numeşte *vecinătate* a unui punct $x_0 \in \mathbb{R}$ o mulţime $V \subseteq \mathbb{R}$ care include un interval de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$ fixat.

Se numeşte *vecinătate a lui* $+\infty$ (respectiv $-\infty$) o mulţime $V \subseteq \mathbb{R}$ care include un interval de forma $(c, \infty]$ (respectiv $[-\infty, c)$), unde $c \in \mathbb{R}$ este fixat.
Notăm cu $\mathcal{V}(x_0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor unui punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Avem proprietăţile:
1^o $\forall\, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$;
2^o $\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$;
3^o $\forall\, V \in \mathcal{V}(x),\ \forall\, U \subseteq \mathbb{R},\ U \supseteq V \Rightarrow x \in V$.

Rezultă din definiţii.

■ (*Proprietatea de separaţie* ***Hausdorff***). Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \neq y$, atunci există vecinătăţi disjuncte ale acestora.

Din $x \neq y \Rightarrow |x-y| > 0$. Fie $\alpha = |x-y|$ şi fie intervalele:
$U = (x - \frac{\alpha}{3}, x + \frac{\alpha}{3})$ (care este vecinătate pentru x),
$V = (y - \frac{\alpha}{3}, y + \frac{\alpha}{3})$ (care este vecinătate pentru y),
Mulţimile U şi V sunt disjuncte. Într-adevăr, presupunând prin reducere la absurd că $U \cap V \neq \emptyset$, rezultă că există un $z \in U \cap V$, adică $z \in U$, de unde $|z-y| < \frac{\alpha}{3}$. Atunci:
$\alpha = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3}$, contradicţie.

■ **0.3..** Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime. Un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ (respectiv $\overline{\mathbb{R}}$) se numeşte *punct de acumulare* în $\mathbb{R}$ (respectiv $\overline{\mathbb{R}}$) al mulţimii A dacă, pentru orice vecinătate V a lui x_0, avem: $A \cap (V \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ adică există un $x \in A \cap V,\ x \neq x_0$.
Mulţimea tuturor punctelor de acumulare în $\mathbb{R}$ (respectiv $\overline{\mathbb{R}}$) ale mulţimii A se notează cu $A'[\mathbb{R}]$ (respectiv $A'[\overline{\mathbb{R}}]$) şi se numeşte *derivata mulţimii* A în $\mathbb{R}$ (respectiv $\overline{\mathbb{R}}$).

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime. Atunci:
1^o $x_0 \in A'[\mathbb{R}] \iff (\forall)\, \varepsilon > 0,\ (\exists)\, x \in A\ a.î.\ \ 0 < |x - x_0| < \varepsilon$;
2^o $+\infty \in A'[\overline{\mathbb{R}}] \iff (\forall)\, c \in \mathbb{R}_+,\ (\exists)\, x \in A\ a.î.\ \ x > c$;
3^o $-\infty \in A'[\overline{\mathbb{R}}] \iff (\forall)\, c \in \mathbb{R}_-,\ (\exists)\, x \in A\ a.î.\ \ x < c$;
4^o $A'[\mathbb{R}] = \mathbb{R} \cap A'[\overline{\mathbb{R}}]$
5^o $A'[\mathbb{R}] = A'[\overline{\mathbb{R}}] \iff A$ mărginită;
6^o $+\infty \in A'[\overline{\mathbb{R}}] \iff A$ nu admite majoranţi;
7^o $-\infty \in A'[\overline{\mathbb{R}}] \iff A$ nu admite minoranţi;
8^o $A'[\overline{\mathbb{R}}]$ diferă de $A'[\mathbb{R}]$ prin cel mult două puncte, $-\infty$ şi $+\infty$.

Demonstraţiile sunt evidente.

■ Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ definim modulul (valoarea absolută) a lui x, notat $|x|$, prin:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale modulului:
1^o $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R};\ \ |x| \iff x = 0$;
2^o $|xy| = |x||y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
3^o $|x+y| \leq |x| + |y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

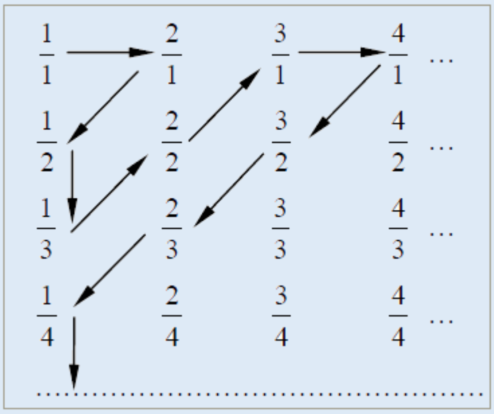
■ **0.3..** O mulţime A se numeşte *numărabilă* dacă există o aplicaţie bijectivă $f: \mathbb{N} \to A$.
În acest caz, rezultă că $E = \{f(n) |\ n \geq 0\}$ este mulţimea termenilor unui şir.

Să se demonstreze următoarele:
1^o Orice submulţime $A \subset \mathbb{N}$ este finită sau numărabilă.
2^o Mulţimea $\mathbb{Z}$ este numărabilă.
3^o Reuniunea a două mulţimi numărabile este numărabilă.
4^o Fie $f: X \to Y$ o aplicaţie. Dacă f este injectivă şi Y numărabilă, atunci X este finită sau numărabilă, iar dacă f este surjectivă şi X este numărabilă, atunci Y este finită sau numărabilă.
5^o Produsul cartezian a două mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.
6^o Mulţimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

1^o Dacă A nu este finită, atunci se poate considera următoarea funcţie bijectivă:
$f\colon \mathbb{N} \to A$, unde $f(0) = \min A$, $f(1) = \min(A \setminus \{f(0)\})$, $f(2) = \min(A \setminus \{f(0), f(1)\})$ etc.
2^o Se consideră funcţia bijectivă:

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, & n \text{ par} \\ -\frac{1}{2}(n+1), & n \text{ impar} \end{cases}$$

3^o Dacă E şi F sunt două mulţimi numărabile, atunci elementele lui $E \cup F$ se obţin alternând elementele lui E şi F dispuse în şir.
4^o Prima afirmaţie este imediată, iar în cazul al doilea se construieşte aplicaţia injectivă $Y \to X$ care asociază oricărui element $y \in Y$ un element ales şi fixat în $f^{-1}(y)$.
5^o Se aplică punctul precedent pentru funcţia injectivă $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m,n) = 2^m \cdot 3^n$ şi rezultă că $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.
6^o Se utilizează aplicaţia surjectivă $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $f(p,q) = {}^p/_q$. Altă demonstraţie
Se arată mai întâi că $\mathbb{Q}_+$ este numărabilă. Se alege pentru fiecare număr fracţia ireductibilă corespunzătoare şi se formează un şir punând mai întâi fracţiile cu suma dintre numărător şi numitor egală cu 1, apoi cele pentru care suma este 2, apoi cele pentru care suma este 3, etc.
Cu alte cuvinte, elementele mulţimii $\mathbb{Q}_+$ pot fi puse sub forma următorului tablou:



Urmând săgeţile, se observă că elementele mulţimii $\mathbb{Q}_+$ se pot pune sub forma unui şir:

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \dots\right\},$$

de unde rezultă că $\mathbb{Q}_+$ este numărabilă. În mod analog, $\mathbb{Q}_-$ este numărabilă. Cum $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$, rezultă că mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

■ **0.3..** 1^o Reuniunea unei familii numărabile (disjuncte sau nu) de mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.
2^o Reuniunea unei familii numărabile de mulţimi finite este o mulţime cel mult numărabilă.
3^o Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este o mulţime cel mult numărabilă.
4^o Produsul cartezian a două mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.

■ Fie A o mulţime infinită. Atunci:
1^o Există două submulţimi nevide $B \subset A$, $C \subset A$, disjuncte ($B \cap C = \emptyset$), cu proprietăţile: $B \cup C = A$ şi $card\ C = \aleph_0$.
2^o Oricare ar fi mulţimea X cu $card\ X \le \aleph_0$ avem: $card\ (A \cup X) = card\ A$.

1^o Fie $b_1, c_1 \in A$, apoi $b_2, c_2 \in A \setminus \{b_1, c_1\}$; în continuare se consideră două elemente $b_3, c_3 \in A \setminus \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$ ş.a.m.d. Astfel se obţin mulţimile numărabile: $B' = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ şi $C' = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$. Se vede că $B = A \setminus C \supset B'$, de unde $A = B \cup C$.
2^o Fără a restrânge din generalitate, se poate admite că $X \cap A = \emptyset$. Conform punctului precedent, avem $A = B \cup C$, unde C este numărabilă, după care $A \cup X = B \cup (C \cup X)$, unde $C \cup X$ este tot numărabilă, ca reuniune a unei mulţimi numărabile cu o mulţime cel mult numărabilă (vezi exerciţiul precedent).

■ Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $c < d$, atunci:
1^o $[a,b] \sim [c,d]$, $(a,b) \sim (c,d)$;

2^o $[a,b) \sim (a,b) \sim (a,b] \sim [a,b]$;
3^o $[a,b) \sim [c,d)$;
4^o $[0,\infty) \sim [a,b] \sim (-\infty,0]$;
5^o $\mathbb{R} \sim (a,b)$.

1^o Funcţia $f:[0,1] \to [a,b]$ definită prin $f(x) = a + x(b-a)$ este o bijecţie, deci $[0,1] \sim [a,b]$ oricare ar fi $a,b \in \mathbb{R}$. Deci şi $[0,1] \sim [c,d]$. Utilizând proprietăţile de simetrie şi tranzitivitate a relaţiei de echipotenţă, obţinem în final că $[a,b] \sim [c,d]$. Analog se arată că $(a,b) \sim (c,d)$.
2^o
3^o
4^o
5^o

■ Mulţimea $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

Este suficient să demonstrăm că intervalul $[0,1]$ nu este mulţime numărabilă.
Presupunem că există o funcţie bijectivă $f:\mathbb{N} \to [0,1]$, $n \mapsto x_n$. Împărţim intervalul $I_0 = [0,1]$ în trei părţi egale. Cel puţin unul dintre cele trei intervale nu va conţine x_0 şi fie $I_1 = [a_1, b_1]$ un astfel de interval: $b_1 - a_1 = \frac{1}{3}$.
Împărţim I_1 în trei părţi egale şi notăm cu $I_2 = [a_2, b_2]$ unul dintre cele care nu conţine x_1 etc...
Se va obţine un şir descendent $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervale închise incluse, astfel încât $x_{n-1} \notin [a_n, b_n]$ pentru orice $n \geq 1$ şi $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$.
Conform lemei intervalelor închise incluse, rezultă că $\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{\xi\}$. Deoarece $\xi \in [0,1]$ şi f este surjectivă, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = \xi$. Dar $\xi \in I_{n+1}$ iar $x_n \notin I_{n+1}$ şi se ajunge la o contradicţie.

Altă metodă de demonstraţie. Se arată mai întâi că intervalul $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x < 1\}$ nu este mulţime numărabilă.
Dacă ar fi numărabilă, elementele acestei mulţimi ar putea fi aşezate sub forma unui şir:

$$\begin{array}{c} 0.a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots \\ 0.a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots \\ 0.a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots \\ 0.a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Se constată însă că acest şir nu conţine toate elementele lui $[0,1)$. Acesta conţine numărul $0.a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$ ale cărui cifre sunt astfel încât $a_1 \neq a_{11}$, $a_2 \neq a_{22}$, $a_3 \neq a_{33}$, ...

Altă demonstraţie ("Procedeul diagonal al lui **Cantor**").
Să presupunem că $\mathbb{R}$ este numărabilă. Din exerciţiul anterior, $\mathbb{R} \sim [0,1]$ şi deci ar rezulta că $[0,1]$ este o mulţime numărabilă, adică: $[0,1] = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.
Orice număr real pozitiv se poate scrie sub forma unei fracţii zecimale $0, x_0, x_1, \ldots x_n \ldots$, unde x_i sunt cifre cuprinse între 0 şi 9.
Astfel elementele din $[0,1]$ se scriu:

$$\begin{array}{l} a_0 = 0, a_0^0 a_1^0 a_2^0 \ldots a_n^0 \ldots \\ a_1 = 0, a_0^1 a_1^1 a_2^1 \ldots a_n^1 \ldots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_n = 0, a_0^n a_1^n a_2^n \ldots a_n^n \cdots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{array}$$

Fie numărul real $b = 0, b_0 b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$, unde

$$b_i = \begin{cases} 2, & \text{dacă } a_i^i \neq 2 \\ 1, & \text{dacă } a_i^i = 2. \end{cases}$$

Deoarece $b \in [0,1]$ rezultă că există n astfel încât $b = a_n$. Scrierea zecimală a lui b fiind unică, din $b = a_n$ rezultă $b_n = a_n^n$, ceea ce contrazice definiţia lui b.

Altă demonstraţie aici.

Observaţie. Din procedeul diagonal al lui **Cantor** rezultă: $\aleph_0 = card\ \mathbb{N} < card\ \mathbb{R} = \aleph_c$.

■ Spunem despre o mulţime M că are *puterea continuului* dacă există o funcţie bijectivă $f:[0,1) \to M$.

Să se arate că următoarele mulţimi au puterea continuului:

$$[0,1)^2 = [0,1) \times [0,1) = \{(x,y) |\ x,y \in [0,1)\}, \quad [1,\infty), \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^n.$$

Funcţia $[0,1) \to [0,1)^2$: $0.a_1a_2a_3a_4 \ldots \mapsto (0.a_1a_3a_5 \ldots, 0.a_2a_4a_6 \ldots)$ este bijectivă.
Mulţimea $[1,\infty)$ are puterea continuului deoarece funcţia $[0,1) \to [1,\infty)$: $x \mapsto 1\,/\,(1-x)$ este bijectivă.

■ (*Teorema de caracterizare a supremumului*). Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un element $M \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A dacă şi numai dacă:
1^o $x \leq M$, $\forall\, x \in A$ şi
2^o $\forall \varepsilon > 0\, \exists x_\varepsilon \in A\ a.î.\, M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Fie $M = \sup A$, adică, echivalent, M este cel mai mic dintre majoranţii mulţimii A. Observăm că relaţia 1^o exprimă faptul că M este majorant pentru A, iar 2^o exprimă faptul că M este cel mai mic majorant pentru A, deoarece orice număr real mai mic decât M se poate scrie sub forma $M - \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ şi, cum $M - \varepsilon$ nu este un amjorant pentru A, înseamnă că există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

■ (*Teorema de caracterizare a infimumului*). Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un element $m \in \mathbb{R}$ este magine inferioară a mulţimii A dacă si numai dacă:
1^o $m \leq x$, $\forall\, x \in A$ şi
2^o $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in A\ a.î.\, x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Demonstraţie similară.

■ Se defineşte mulţimea:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$ (*dreapta încheiată*).

unde elementele $-\infty$ (*minus infinit*) şi $+\infty$ (*plus infinit*) sunt definite prin:

$$-\infty < x\,,\ x < +\infty\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Să se demonstreze că $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ este total ordonată.

Observaţii.
1^o Se pot prelungi operaţiile algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ (fără însă a le defini peste tot!). Astfel:

$$x + \infty = \infty + x = \infty\,, \qquad \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}\ \ (\text{inclusiv}\ \ \infty + \infty = \infty)$$
$$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \qquad \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}\ \ (\text{inclusiv}\ \ -\infty + (-\infty) = -\infty)$$
$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty\,, \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

Topologie pe $\mathbb{R}$. Exerciţii

■ Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Se consideră mulţimile:

$$\begin{cases} \lambda A & = & \{\lambda x \mid x \in A\} \\ A + B & = & \{x + y \mid x \in A, y \in B\}. \\ A \cdot B & = & \{xy \mid x \in A, y \in B\} \end{cases}$$

Să se arate că dacă A şi B sunt mulţimi mărginite, atunci $\lambda A, A + B$ şi $A \cdot B$ sunt mărginite şi, în plus:

1^o $\inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \inf A, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda = 0; \\ \lambda \sup A, & \lambda < 0 \end{cases}$

2^o $\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup A, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda = 0; \\ \lambda \inf A, & \lambda < 0 \end{cases}$

3^o $\inf A + \inf B = \inf(A + B) \le \sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

4^o Dacă $A, B \subset [0, \infty)$ atunci $(\inf A)(\inf B) = \inf(A \cdot B) \le \sup(A \cdot B) = (\sup A)(\sup B)$.

1^o Considerăm $\lambda > 0$ şi fie $\alpha = \inf A$. Folosind caracterizarea marginii inferioare cu inegalităţi, avem:

- $\forall\, x \in A$ cu $\alpha \le x \Rightarrow \lambda\alpha \le \lambda x$;
- $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon$ astfel încât $x_\varepsilon < \alpha + \frac{\varepsilon}{\lambda} \Rightarrow \lambda x_\varepsilon < \lambda a + \varepsilon$,

de unde deducem: $\lambda\alpha = \inf\,(\lambda\alpha)$.

Dacă $\lambda = 0$ atunci $\lambda A = \{0\}$ şi $\inf(\{0\}) = 0$.

În cazul $\lambda < 0$, folosind din nou caracterizarea cu inegalităţi a marginii inferioare, $\alpha = \inf A$, avem:

- $\forall\, x \in A, \alpha \le x \Rightarrow \lambda\alpha \ge \lambda x$;
- $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon$ astfel încât $x_\varepsilon < \alpha - \frac{\varepsilon}{\lambda} \Rightarrow \lambda x_\varepsilon < \lambda a - \varepsilon$,

din care rezultă: $\lambda a = \sup(\lambda A)$.

2^o Demonstraţie similară.

3^o

4^o

■ Utilizând axioma lui **Arhimede**, să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ există $n \in \mathbb{Z}$ a.î. să avem:

1^o $x^2 + n \ge nx + 1$.

2^o $x^2 \ge 2x + n$.

1^o Inegalitatea se mai scrie: $x^2 - 1 \ge n(x - 1)$. Pentru $x = 1$ este evidentă.

Dacă $x \ne 1$, pentru numărul real

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1,$$

conform axiomei lui **Arhimede**, există $n \in \mathbb{Z}$ a.î. $x + 1 \ge n$.

■ Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sunt mărginite, atunci şi mulţimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ şi orice submulţime a lui A, B este mărginită.

■ Să se arate că mulţimea $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Această mulţime poate fi ordonată în felul următor:

$$\begin{array}{cccccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & (0,4) & \cdots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \cdots \\ (3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \cdots \\ (4,0) & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

■ Mulţimile de forma $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, sunt numărabile.

Se foloseşte metoda inducţiei după modelul exerciţiului precedent.

■ Mulţimea $[0,1] = \{x \in \mathbb{R}:\ 0 \leq x \leq 1\}$ nu este numărabilă.

Presupunem prin absurd că mulţimea $[0,1]$ este numărabilă, deci că $I = [0,1] = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.
Împărţim intervalul I în trei intervale închise egale. Există cel puţin un subinterval (dintre acestea) care nu îl conţine pe x_1. Notăm cu I_1 acest interval. Împărţim acum intervalul I_1 în trei părţi egale. Există cel puţin un interval I_2 care nu îl conţine pe x_2.
Procedând în continuare în acest mod, obţinem un şir de intervale închise:

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

cu proprietatea că $x_n \in I_n$. Pe de alt parte, observăm că lungimea intervalului I_n este $\frac{1}{3^n}$.
Dacă notăm cu a_n, respectiv b_n, extremităţile intervalului I_n, obţinem două şiruri de numere raţionale $\{a_n\}, \{b_n\}$ care îndeplinesc condiţiile din axioma lui **Cantor**. Rezultă că există $y \in Y$ astfel încât:

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset I\,.$$

Pe de altă parte este evident că $y \neq x_n$ pentru orice n, deci $y \notin I$, contradicţie.

Vezi Mulţimi dense

Inegalități

■ **0.4..**

■ **0.4..**

■ *Inegalitatea lui* ***Cauchy-Buniakowski-Schwarz***. Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}\ \ (n \in \mathbb{N}^*)$. Atunci :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

■ **0.4..**

■ **0.4..**

■ Dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4.$

■ Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in (0, \infty)$, atunci

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots b_n}.$$

- Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in (0,\infty)$, atunci

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\dots b_n}$$

- Fie $a, b \in (0,1)$. Să se demonstreze că:

$$\log_a \frac{2ab}{a+b}+\log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

Şiruri

■ **0.5.1.** Se numeşte *şir de numere reale* o funcţie reală definită pe mulţimea numerelor naturale: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Dacă $f(n) = a_n,\ n \in \mathbb{N}$, se va nota şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ se numeşte *convergent* cu limita $a \in \mathbb{R}$ dacă în orice vecinătate a lui a se află toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit. În acest caz, se notează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$ pentru $n \to \infty$.

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este convergent cu limita $a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$.

Demonstraţia este evidentă.

■ (*Unicitatea limitei unui şir*) Limita unui şir real, dacă există, este unică.

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Presupunem prin absurd că a, b sunt limite ale acestuia şi că $a \neq b$. De aici rezultă că există o vecinătate V_a a lui a şi o vecinătate V_b a lui b astfel încât $V_a \cap V_b \neq \emptyset$. Din teorema anterioară rezultă că există $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $a_n \in V_a,\ \forall n \geq n_a$ şi $a_n \in V_b,\ \forall\ n \geq n_b$.
Deci $a_n \in V_a \cap V_b, \forall\ n \geq n_a + n_b$, ceea ce contrazice faptul că $V_a \cap V_b \neq \emptyset$.

■ **0.5.5.** Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă orice vecinătate a punctului $+\infty$ (respectiv $-\infty$) conţine toţi termenii şirului cu excepţia a eventual unui număr finit al acestora.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir monoton crescător (respectiv descrescător). Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă şi numai dacă şirul nu admite majoranţi (respectiv minoranţi).

Să presupunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. Dacă $x_n \to \infty$, atunci $\forall\ c > 0$ există $n_0 \geq 1$ a.î. $x_n \geq c,\ \ \forall\ n \geq n_0$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ nu admite majoranţi.
Reciproc dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ nu admite majoranţi, atunci $\forall\ c > 0$ există $n_0 \geq 1$ a.î. $x_{n_0} > c$.
Atunci $x_n > x_{n_0} > c\ \ \forall\ n \geq n_0$, deci $x_n \to \infty$.

■ **0.5.6.** Un şir care nu este convergent se numeşte *divergent*.

Şirul $x_n = (-1)^n\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$ este divergent.

Presupunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi fie x limita sa.
Atunci există un $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{1}{2},\ \ \forall\ n \geq N$.
Luând n par (respectiv impar), $n \geq N$, obţinem: $|1 - x| < \frac{1}{2}$, respectiv $|-1 - x| < \frac{1}{2}$, de unde rezultă $x > \frac{1}{2}$ respectiv $x < -\frac{1}{2}$, ceea ce este absurd.

■ Fie $x_n = \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}$. Atunci $x_n \to 0\ (n \to \infty)$.

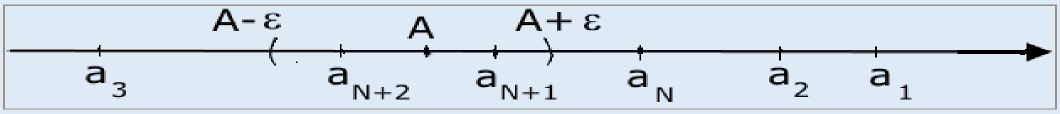
Fie $\varepsilon > 0$ fixat.
Atunci conform axiomei lui **Arhimede**, există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$, deci $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon,\ \ \forall\ n \geq n_\varepsilon$ şi deci $x_n \to 0$.

■ Un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *mărginit* dacă există numerele m şi M astfel încât:

$$m \leq a_n \leq M\,,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ convergent este mărginit.

Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci există N astfel încât intervalul deschis $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ să conţină toţi termenii a_n cu $n > N$ şi $a_1, a_2, \dots, a_N$ sunt singurii termeni ai şirului ce se pot afla în exteriorul intervalului.



Astfel, în exteriorul intervalului există doar un număr finit de termeni şi alegem $\tilde{a}$ ca fiind egal cu cel mai mic dintre aceştia, iar $\hat{a}$ cu cel mai mare intre aceştia. Considerăm:

$$m = \min\{\tilde{a}, A-\varepsilon\},\quad M = \max\{\tilde{a}, A+\varepsilon\}.$$

Atunci intervalul închis $[m, M]$ conţine termenii $a_1, a_2, \dots, a_N$ şi intervalul deschis $(A-\varepsilon\,, A+\varepsilon\,)$. Deoarece toţi termenii şirului a_n cu $n > N$ sunt în intervalul $(A-\varepsilon\,, A+\varepsilon\,)$, atunci intervalul închis $[m, M]$ conţine toţi termenii şirului $\{a_n\}$. Rezultă că şirul este mărginit.

Observaţie. Mărginirea este o condiţie necesară pentru convergenţă, nu şi suficientă.
De exemplu şirul 1, 0, 1, 0, …. este mărginit, dar nu este convergent.

■ (*Operaţii cu şiruri convergente*). Fie (a_n), (b_n) două şiruri reale convergente la numerele a şi respectiv b.

1^o Şirul $(a_n + b_n)$ converge la $a + b$ (*regula sumei*).

2^o Şirul $(a_n \cdot b_n)$ converge la $a \cdot b$ (*regula produsului*).

3^o Dacă $b_n \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $b \neq 0$, atunci şirul $\frac{a_n}{b_n}$ converge la $\frac{a}{b}$ (*regula câtului*).

1^o Fie $\varepsilon > 0$ şi $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ există $N_1 = N_1(\varepsilon')$ astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon',\ \forall\, n > N_1$ şi există $N_2 = N_2(\varepsilon')$ astfel încât $|b_n - b| < \varepsilon',\ \forall\, n > N_2$.
Fie $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Pentru orice $n > N_3$ avem:

$$|a_n - b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon' = \varepsilon,$$

care demonstrează că $a_n + b_n \to a + b$ când $n \to \infty$.

2^o Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, există $M > 0$ astfel ca $|b_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă:

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| = |b_n \cdot (a_n - a) + a \cdot (b_n - b)| \leq$$
$$\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \leq M \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

3^o

■ Produsul dintre un şir mărginit $(x_n)_{n\geq 0}$ şi un şir $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent la 0 este un şir convergent la 0.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, există $M > 0$ astfel că $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent la 0, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca:

$$|y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci:

$$|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0.

■ (*Regula cleştelui*): Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $(c_n)_{n\geq 0}$, trei şiruri de numere reale care verifică inegalităţile:

$$a_n \leq b_n \leq c_n\,,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(c_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente la acelaşi număr L, atunci şi $(b_n)_{n\geq 0}$ este convergent la aceaşi limită L.

■ n7xvvkHM Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir din $\mathbb{R}$. Numărul $\inf\limits_{n\geq 1}\,(\sup\limits_{i\geq n} x_i)$ (respectiv $\sup\limits_{n\geq 1}(\inf\limits_{i\geq n} x_i)$) se numeşte *limita superioară* (respectiv *limita inferioară*) a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ (respectiv $\underset{n\to\infty}{\mathit{lim}}\ x_n$).

Numărul $x \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct limită* al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă există un subşir al acestuia care are limita x.

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă şi numai dacă $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

În această situaţie:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n .$$

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita l, atunci orice subşir are aceeaşi limită l, deci $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.
Reciproc, să presupunem că $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = l$ şi fie $V \in \mathcal{V}(l)$ o vecinătate arbitrară. Atunci în afara lui V se pot afla doar un număr finit de termeni ai şirului, în caz contrar din aceşti termeni se poate extrage un şir cu limită, alta decât l, deoarece aceşti termeni s-ar situa în afara vecinătăţii V.

■ f2NdJTY7 Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci:

1^o Există $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n < \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$.

2^o Există $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n < \liminf_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$.

1^o Presupunem că există un $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ există $n \geq n_\varepsilon^1$ astfel că $x_n \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$.
Pentru $n_\varepsilon^1 = 0$, există k_0 astfel ca $x_{k_0} \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$. Pentru $n_\varepsilon^1 = k_0 + 1$, obţinem că există $k_1 \geq n_0 + 1 > n_0$ astfel ca $x_{k_1} \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$. Procedând iterativ, obţinem existenţa unui subşir $\left(x_{k_m}\right)_{m\geq 0}$ cu proprietatea că:

$$x_{k_m} \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon \text{ pentru orice } m \geq 0.$$

Cum $\left(x_{k_m}\right)_{m\geq 0}$ este mărginit , fiind subşir al şirului iniţial $(x_n)_{n\geq 0}$, urmează că $\left(x_{k_m}\right)_{m\geq 0}$ are la rândul său un subşir convergent la o limită finită l. Conform proprietăţii de trecere la limită în inegalităţi, urmează că:

$$l \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon \ ,$$

ceea ce contrazice faptul că:

$$l \leq \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

deoarece l este un punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.
2^o Demonstraţie similară.

■ Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termenii strict pozitivi. Are loc inegalitatea:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} .$$

Demonstrăm mai întâi că:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} .$$

Fie $L = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Dacă $L = +\infty$, inegalitatea de mai sus este evidentă. Presupunem acum că $L < +\infty$ şi fie $\varepsilon > 0$.
Cum $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon$, urmează conform propoziţiei f2NdJTY7 că există n_1^ε astfel ca $\frac{x_{n+1}}{x_n} < (L+\varepsilon) + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_1^\varepsilon$.
De aici:

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \dots \frac{x_{n_1^\varepsilon+1}}{x_{n_1^\varepsilon}} x_{n_1^\varepsilon} < x_{n_1} (L+2\varepsilon)^{n-n_1^\varepsilon} \text{ pentru orice } n \geq n_1^\varepsilon ,$$

de unde:

$$\sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{x_{n_1}} (L+2\varepsilon)^{1-\frac{n_1^\varepsilon}{n}} \text{ pentru orice } n \geq n_1^\varepsilon ,$$

iar

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq L + 2\varepsilon ,$$

prin trecere la limită superioară. Cum $\varepsilon > 0$ era arbitrar, urmează că $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq L$, ceea ce trebuia demonstrat. cea de-a oua inegalitate se demonstrează analog.

Observaţie. Conform teoremei n7xvvkHM, din rezultatul de mai sus se poate deduce imediat următorul criteriu de existenţă a limitei radicalului de ordin n al unui şir dat. În acest mod, se poate reduce calculul unor limite care conţin radicali de ordin n la calculul unor limite de rapoarte, care pot fi mai simple decât cele dintâi.

■ Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = l$.

Se aplică propoziţia anterioară.

■ Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci

1^o Dacă $l \in [0,1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2^o Dacă $l \in (1,\infty]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

3^o Dacă $l = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul limitei raportului (spunem că este un caz de dubiu).

Fie $l \in [0,1)$. Există atunci $\varepsilon > 0$ astfel ca $l + \varepsilon < 1$. Există de asemenea $n_1^\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\left|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} - l\right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_1^\varepsilon$. Urmează că:

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{n_1^\varepsilon+1}}{x_{n_1^\varepsilon}}\cdot x_{n_1^\varepsilon} < x_{n_1}\,(l+\varepsilon)^{n-n_1^\varepsilon} = x_{n_1}\,(l+\varepsilon)^{-n_1^\varepsilon}\,(l+\varepsilon)^n\,.$$

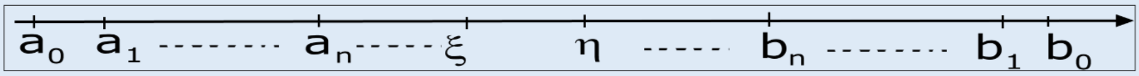
Cum $l + \varepsilon < 1$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty}(l+\varepsilon)^n = 0$. Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi, se obţine conform criteriului cleştelui că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2^o Demonstraţie similară.

3^o Fie $(x_n)_{n\geq 0}:\ \ x_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Fie de asemenea $(x_n)_{n\geq 0}:\ \ x_n = \frac{1}{n}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. În concluzie, dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ poate fi atât convergent cât şi divergent.

■ (*Lema intervalelor închise incluse*) Fie $I_n = [a_n, b_n], n \geq 0$ un şir descendent de intervale închise, $I_0 \supset I_1 \supset \cdots$ Atunci mulţimea $I = \bigcap_{n\geq 0} I_n$ este nevidă. Dacă în plus $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, atunci mulţimea I este nevidă.

Fie $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$ şi $B = \{b_n \mid n \geq 0\}$. Atunci mulţimea A este majorată (de b_0); fie $\xi = \sup A$. În mod similar, mulţimea B este minorată, fie $\eta = \inf B$. Deoarece $a_n \leq b_m$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $\xi \leq \eta$; în acelaşi timp $a_n \leq \xi \leq \eta \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$ deci $[\xi, \eta] \subset \bigcap_{n\geq 0} I_n$.
Dacă în plus $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, din inegalităţile $0 \leq \eta - \xi \leq b_n - a_n$ rezultă $\xi = \eta$ şi deci $\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{\xi\}$.



Observaţie. Condiţia de închidere a intervalelor este esenţială; de exemplu, pentru $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 1$, intersecţia $\bigcap_{n\geq 0} I_n$ este vidă.

■ (*Lema lui **Cesaró***) Orice şir mărginit în $\mathbb{R}$ are un subşir convergent.

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit în $\mathbb{R}$ şi $a < b$ astfel încât $a \leq x_n \leq b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi c mijlocul intervalului $[a, b]$. Dintre intervalele $[a, c]$ şi $[c, b]$ alegem unul care conţine o infinitate de termeni ai şirului şi îl notăm $I_1 = [a_1, b_1]$.
Deci mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_1, b_1]\}$ este infinită; $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.
Fie c_1 mijlocul intervalului $[a_1, b_1]$. Dintre intervalele $[a_1, c_1]$ şi $[c_1, b_1]$ alegem $I_2 = [a_2, b_2]$ care conţine o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Deci mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_2, b_2]\}$ este infinită; $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$.
Se construieşte prin inducţie un şir de intervale închise:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots\ \ ;\ \ I_k = [a_k, b_k],$$

astfel încât mulţimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_k, b_k]\}$ este infinită; $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Conform teoremei anterioare, rezultă $\bigcap_{k\geq 0} I_k = \{\xi\}$, unde $I_0 = [a, b]$.
Din modul în care au fost construite intervalele I_k putem găsi un şir de numere naturale:

$$n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots \text{ şi } x_{n_k} \in I_k\ \ (\forall\, k \in \mathbb{N}).$$

Deducem din $x_{n_k}, \xi \in I_k$ $(\forall\, k \in \mathbb{N})$:

$$\left|x_{n_k} - \xi\right| \leq \frac{b-a}{2^k}\ \ (\forall\, k \in \mathbb{N}) \text{ deci } x_{n_k} \to \xi.$$

■ Un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *monoton* dacă satisface una din condiţiile:

1^o Este *crescător* adică: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$
1^o Este *descrescător* adică: $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$.

Orice şir monoton şi mărginit are limită.

Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ monoton şi mărginit. Condiţia demărginire impune faptul că termenii şirului formează o mulţime care are supremum şi infimum. Fie M supremum pentru mulţime şi să arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$.
Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$, există a_N a.î.:

$$M - \varepsilon < a_N \leq M$$
$$0 \leq M - a_N < \varepsilon.$$

Dacă se presupune $(a_n)_{n\geq 0}$ crescător, avem:

$$0 \leq M - a_n \leq M - a_N < \varepsilon\,, \qquad \forall\, n > N$$
$$0 \leq M - a_n < \varepsilon\,, \qquad \forall\, n > N$$
$$|a_n - M| < \varepsilon\,, \qquad \forall\, n > N,$$

ceea ce stabileşte că M este limita şirului.
În mod similar se demonstrează că, în cazul când $(a_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$, unde m este infimum pentru mulţimea termenilor.

Observaţie. Pentru ca un şir să fie convergent nu este necesar ca şirul să fie monoton. Exemplu: şirul $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nu este monoton dar converge la zero.

0.5.. Un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *fundamental* sau *şir* ***Cauchy*** dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\; a.\hat{\imath}.\;\; \forall\, m,n \geq N(\varepsilon),\;\; |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(*Criteriul general al lui* ***Cauchy*** *pentru şiruri în* $\mathbb{R}$). Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă acesta este fundamental.

Dacă $a_n \to a$, atunci $0 \leq |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a|$ deci $\lim\limits_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$ şi rezultă că şirul este fundamental.
Reciproc, dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este fundamental, atunci acesta este mărginit; într-adevăr, pentru $\varepsilon = 1$ există *N* natural astfel încât $\forall\, n \geq N,\;\; |a_n - a_N| < 1$ deci $a_n \in (a_N - 1, a_N + 1)$ pentru orice $n \geq N$ şi deci toţi termenii şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ vor fi cuprinşi într-un acelaşi interval mărginit care include intervalul $(a_N - 1, a_N + 1)$. Conform lemei lui **Cesaró**, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ va avea un subşir convergent $a_{k_n} \to a$. Mai trebuie să demonstrăm că $a_n \to a$. Pentru aceasta, fie un $\varepsilon > 0$. Alegem un N_1 astfel încât $\forall\, m,n \geq N_1$, $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi N_2 astfel încât $\forall\, n \geq N_2$, $\left|a_{k_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci luând $N = \max(N_1, N_2)$ şi $n \geq N$, rezultă $k_n \geq n \geq N$ şi deci: $\left|a_{k_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|a_n - a_{k_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ deci $|a_n - a| \leq \left|a_n - a_{k_n}\right| + \left|a_{k_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ adică $a_n \to a$.

Observaţii.
1^o Dacă notăm $p = m - n$, condiţia se mai poate scrie

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\; a.\hat{\imath}.\, \forall\, n \geq N(\varepsilon) \wedge \forall\, p \geq 1,\;\; \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon.$$

2^o Condiţia ca un şir să fie fundamental este intrinsecă, nedepinzând de un element exterior cum este limita şirului.
3^o În teoria spaţiilor topologice, această teoremă se traduce prin faptul că mulţimea $\mathbb{R}$, în raport cu distanţa euclidiană, este un *spaţiu metric complet*.
4^o Dacă x este limita şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, putem aproxima $x \approx x_n$ şi aproximarea este cu atât mai bună cu cât rangul n este mai mare. Astfel, dacă $\left|x_{n+p} - x_n\right| \leq y_n$ pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental deci convergent. Dacă $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se poate arăta că $|x_n - x| \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face paroximarea $x \approx x_n$. Evident, dacă se impune ca eroarea să fie mai mică decât ε dat, se va determina cea mai mică valoare n_ε a lui n pentru care $y_n < \varepsilon$ şi se va aproxima $x \approx x_n$.

(*Limita unei funcţii polinomiale*). Să se calculeze limita funcţiei polinomiale $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grad $k \geq 1$:

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,, \qquad a_k \neq 0\,.$$

Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}\,,\;\; x_n = P(n)$. Se va scoate factor comun forţat n^k $(k = grad\; P)$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(a_k n^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{n\to\infty} n^k\,(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k}) =$$
$$= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă }\; a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă }\; a_k < 0 \end{cases}.$$

Observaţie. Se observă că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea:

$$\lim_{n\to\infty} a_k n^k = \infty \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} x_n \,,$$

de unde se poate remarca faptul că limita lui $P(n)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P.

■ (*Limita unei funcţii raţionale*). Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, unde P, Q sunt două funcţii polinomiale de grad k, respectiv l, unde $k, l \geq 1$,

$$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,, \qquad a_k \neq 0\,,$$
$$Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \,, \qquad a_k \neq 0\,.$$

Se va scoate factor forţat n^k de la numărator, respectiv n^l de la numitor:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k}\right)}{n^l \left(b_l + b_{l-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_1 \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \frac{1}{n^l}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{k-1} \frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0\,, & dacă\ k < l \\ \frac{a_k}{b^l}\,, & dacă\ k = l \\ +\infty\ \frac{a_k}{b^l}\,, & dacă\ k > l \end{cases}.$$

Observaţie. Se observă că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n\to\infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l}\,,$$

de unde se poate remarca faptul că limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P şi Q. De asemenea, dacă $grad\ P < grad\ Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$, deci dacă gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este zero. Dacă $grad\ P = grad\ Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k}{b^l}$, deci dacă gradul numitorului este egal cu gradul numărătorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este raportul coeficienţilor termenilor dominanţi. Dacă $grad\ P > grad\ Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ este $+\infty$ dacă coeficienţii termenilor dominanţi au acelaşi semn, respectiv $-\infty$ dacă coeficienţii termenilor dominanţi au semne opuse.

■ Să se arate că:

1^o Şirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, este strict crescător şi nemărginit.

2^o Şirul $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \geq 1$ este strict descrescător şi mărginit.

3^o Cele două şiruri au aceeaşi limită pe care o vom nota $\mathbb{e}$ şi avem:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathbb{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ \forall\, n \geq 1.$$

Vom demonstra că:

(1) $e_n < e_{n+1} \leq y_{n+1} - y_n,\ \forall\, n \geq 1.$

Avem: $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} > \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1\,,\ \forall\, n \geq 1.$

(S-a utilizat inegalitatea lui **Bernoulli**.)

Deci $e_n < e_{n+1},\ \forall\, n \geq 1$, adică şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

Mai departe: $\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1} > \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n^2+3n+1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)^2+1}{n(n+2)^2} > 1,\ \forall\, n \geq 1.$

Aşadar, $y_n > y_{n+1},\ \forall\, n \geq 1$, deci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

Rezultă inegalităţile (1) şi deci şirurile $(e_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt mărginite. Conform teoremei **Weierstrass**, există limitele:

$$\lim_{n\to\infty} e_n\,,\ \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Din inegalităţile:

$0 < y_n - e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot e_n \leq \frac{y_n}{n} < \frac{y_1}{n} \to 0$, pentru $n \to \infty$,

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Considerând inegalităţile: $e_n < e_{n+m} \leq y_{n+m} < y_n,\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}^*$,

prin trecere la limită pentru $m \to \infty$, se obţine: $e_n < \mathbb{e} < y_n\,,\ \forall\, n \geq 1.$

Observaţie. Limita comună a celor două şiruri se notează cu $\mathbb{e}$ după iniţiala matematicianului **LEONHARD EULER** şi prezintă o deosebită importanţă în analiza matematică, ceea ce se va vedea ulterior.

Au loc următoarele proprietăţi:

1^o Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale strict pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathbb{e}\,.$$

2^o Fie $(y_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale strict pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = \mathbb{e}\,.$$

3^o Fie $(z_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule cu $\lim\limits_{n\to\infty} z = 0$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}(1+z_n)^{\frac{1}{z_n}}\,.$$

Demonstraţia rezultă din propoziţia anterioară.

Să se demonstreze că:

1^o $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = \mathbb{e}$.

2^o $0 < \mathbb{e} - \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n}\,,\ \forall\, n \geq 1$.

3^o Numărul $\mathbb{e}$ este iraţional.

1^o Notăm: $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\,,\ n\geq 1$.

Se utilizează inegalitatea: $k! \geq 2^{k-1}\,,\ \forall\, k\geq 1$, care se demonstrează prin inducţie şi se obţine:

$0 < a_n \leq 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3\,,\ \forall\, n\geq 1$.

Rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit şi, cum este şi crescător, conform teoremei lui **WEIERSTRASS**, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{not}{=} a$.

Vom demonstra că $a = \mathbb{e}$. Conform problemei anterioare:

$$e_n = 1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

de unde rezultă că: $e_n \leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} = a_n\,,\ \forall\, n\geq 1$.

Deci, la limită pentru $n\to\infty$, obţinem că: $\mathbb{e}\leq a$. Mai departe:

$$e_n > 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\,,\ \forall\, k<n.$$

Pentru k fixat, prin trecere la limită pentru $n\to\infty$ se obţine: $\mathbb{e}\geq a_k\,,\ \forall\, k\geq 2$.

Pentru $k\to\infty$, deducem: $\mathbb{e}\geq a$.

2^o Fie $s_n := 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ $(n\geq 1)$. Evident avem

$$0<\mathbb{e}-s_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots < \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right] = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

3^0 Din 2^o rezultă: $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, \theta_n\in(0,1)$ a.î.

$$\mathbb{e} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}.$$

Presupunem $\mathbb{e}$ raţional, deci $\exists\, p,q\in\mathbb{N},\ (p,q)=1$ cu $\frac{p}{q}=\mathbb{e}$. Atunci $\exists\,\theta=\theta(q)\in(0,1)$ a.î.

$\frac{p}{q} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{q!\,q}$, deci

$\theta = q!\,p-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)q!\,q\in\mathbb{Z}$,

ceea ce este absurd.

Să se arate că şirul:

$$b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,,\qquad n\geq 1$$

este convergent.

Prin logaritmarea inegalităţilor de la problema **0.5.11**, rezultă:

$$n[\ln(n+1)-\ln n]<1<(n+1)[\ln(n+1)-\ln n]\,,\ \forall\, n\geq 1,$$

de unde rezultă:

$$(\star)\qquad \frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}\,,\ \forall\, n\geq 1.$$

Scriem inegalităţile de mai sus pentru $n \coloneqq 1,2,3,\dots,n$ şi le adunăm. Obţinem:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\,,\ \forall\, n\geq 1.$$

Deci: $\ln n<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\,,\ \forall\, n\geq 1.$

Rezultă că: $b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,,\ \forall\, n\geq 1.$

Pe de altă parte, din $(\star)$ rezultă că: $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n<0\,,\ \forall\, n\geq 1,$

adică şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Din teorema lui **WEIERSTRASS** rezultă că $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \overset{not}{=} \gamma$, numită *constanta lui* ***EULER***, cu valoarea aproximativă: $\gamma\approx 0{,}577215\dots$.

0.5..

0.5.. Se numeşte *matrice infinită* (şir dublu) de numere reale o funcţie $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ şi se notează prin $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ sau $(a_{nk})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$, unde $a_{nk}=f(n,k)$. O matrice infinită se numeşte *triunghiulară*, dacă

$a_{nk}=0,\ \forall\,(n,k)\in\mathbb{N}^2\,, k>n,$ deci este de forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

(*Teorema* ***TOEPLITZ***). Fie $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere nenegative cu proprietăţile:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}=1\,,\ \forall\, n\geq 1\,;$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=0\,,\forall\, k\geq 1.$

1^o Atunci $\forall\,(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale care are limită, rezultă că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, unde $y_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\,x_k$ (numit *transformata* ***TOEPLITZ*** *a şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$), are limită şi avem: $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2^o Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita ∞, atunci transformata sa **TOEPLITZ**, $(y_n)_{n\geq 1}$, are limita ∞.

1^o Se consideră cazurile:

$a)$ $x_n\to 0.$ Se fixează un $\varepsilon>0$ şi atunci $\exists\, N\geq 1$ a.î. $|x|\leq\frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall\, n\geq N$. Dacă $n>N$, se poate scrie:

$$y_n=(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nN}x_N)+(a_{n,N+1}x_{N+1}+\cdots+a_{nn}x_n)\qquad(1)$$

$b)$

2^o Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n\to\infty$; se poate presupune că toţi termenii şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ sunt strict pozitivi. Fie $C>0$; din condiţia (i) rezultă că există $N_1\in\mathbb{N}$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{nk}>\frac{1}{2}\,,\qquad \forall\, n\geq N_1\,.$$

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ fiind nemărginit, există $N_2\in\mathbb{N}$ astfel încât $x_n\geq 2C,\ \forall\, n\geq N_2$. Fie $N_3=\max\{N_1,N_2\}$; atunci pentru orice $n\geq N_3$ avem:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\,x_k=\sum_{k=1}^{N_3}a_{nk}\,x_k+\sum_{k=N_3}^{n}a_{nk}\,x_k\geq\sum_{k=1}^{N_3}a_{nk}\,x_k+C>C.$$

(*Teorema* ***STOLZ-CESARO***).

1^o Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două siruri reale cu proprietăţile următoare:

- $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict monoton şi nemărginit;
- există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l,\ l\in\overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

2^o Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri reale cu proprietăţile următoare:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;
- şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict monoton;
- există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l,\ l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

3^o (Corolar). Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere pozitive cu proprietatea că există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,\ l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = l$.

1^o
2^o
3^o

■ Fie X un interval real de tipul $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[a, \infty)$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
O funcţie $f: X \to X$ se numeşte *contracţie* dacă există un $c \in [0, 1)$ numit *coeficient de contracţie* astfel încât:

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|\ , \forall\, x, y \in \mathbb{R}\ .$$

(*Teorema de punct fix a lui* ***Banach***, *Principiul contracţiei*). Pentru orice contracţie $f: X \to X$ există şi este unic un punct $\xi \in X$ astfel încât $f(\xi) = \xi$.

Observaţii.
1^o Punctul ξ se numeşte *punct fix* al aplicaţiei f.
2^o Trebuie reţinută metoda de determinare a punctului fix, cunoscută sub numele de *metoda aproximaţiilor succesive*: prima aproximaţie $x_0 \in X$ este aleasă arbitrar, apoi aproximaţiile $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots$ sunt determinate succesiv folosind f; se demonstrează că:

$$|x_n - x_{n+p}| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n\ ,$$

pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$, unde c este coeficientul e contracţie, iar $\delta = |x_0 - x_1|$. Indiferent de alegerea lui x_0, şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la aceeaşi limită ξ.
Formula precisă $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este înlocuită în practică prin formula de aproximare $\xi \approx x_n$. Pentru a evalua eroarea care apare în această exprimare, se poate arăta că $|x_n - \xi| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi se raţionează ca la observaţia 4^o de la criteriul general al lui **Cauchy**.

■

0.5. Şiruri. Exerciţii

■ Să demonstreze următoarele:

1^o Limita şirului definit prin $a_n = \frac{3n+1}{4n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ este $\frac{3}{4}$. Să se determine un rang începând de la care diferenţa dintre limita şirului şi a termenului general să fie mai mică decât 1/100.

2^o Limita şirului $a_n = \frac{2^n+(-1)^n}{5^n}$ este zero.

3^o Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n^2+2n+3}{n+1}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

1^o Să considerăm un număr $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, arbitrar, momentan fixat.
Vom determina un rang $n_0(\varepsilon)$ a.î.

$$\left|\frac{3n+1}{4n+1} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Inegalitatea de mai sus se mai poate scrie: $\frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon$ sau, în mod echivalent: $n > \frac{1-4\,\varepsilon}{16\varepsilon}$.
Notând:

$$n_0(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\dfrac{1-4\,\varepsilon}{16\varepsilon}\right] + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{4} \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon > \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

rezultă că pentru $n \geq n_0(\varepsilon)$ avem: $\left|a_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$, unde $a_n = \frac{3n+1}{4n+1}$.

Pentru a determina rangul începând de la care diferenţa dintre limita şirului şi termenul general este mai mică decât 1/100, calculăm $n_0(1/100) = 7$. Deci termenii $a_7, a_8, \ldots$ diferă de limita 3/4 cu mai puţin de 1/100.

2^o Avem: $\left|\frac{2^n+(-1)^n}{5^n}\right| \leq \frac{2^n+1}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
Pentru un $\varepsilon > 0$ fixat, impunem condiţiile $(2/5)^n < \varepsilon/2$ şi $(1/5)^n < \varepsilon/2$.
Prima inegalitate este verificată pentru $n \geq \widetilde{n_0}(\varepsilon)$, unde:

$$\widetilde{n_0}(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}\right] + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq 2 \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon > 2 \end{cases}$$

A doua inegalitate se verifică de îndată ce $n \geq \widetilde{n_0}(\varepsilon)$, unde:

$$\widetilde{n_0}(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\ln 5}\right] + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq 2 \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon > 2 \end{cases}$$

Luând $n_0(\varepsilon) = \max\{\widetilde{n_0}(\varepsilon),\ \widetilde{n_0}(\varepsilon)\}$ rezultă că $\left|2^n + \frac{(-1)^n}{5^n}\right| < \varepsilon$ pentru $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$.

3^o Fie $M > 0$ arbitrar. Au loc relaţiile:

$$x_n = n + 1 + \frac{2}{n+1} > M$$

cu condiţia ca: $n + 1 > M \iff n > M - 1$.

Atunci $n_M = [M - 1] + 1 = [M]$, iar pentru $n \geq n_M,\ x_n > M$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

■ Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni pozitivi, $x_n > 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, atunci sunt valabile inegalităţile:

$\underline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{x_n} = \overline{\lim}\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}$

Se va demonstra mai întâi că: $\overline{\lim}\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Dacă $a = \overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \infty$, inegalitatea este evidentă.

Dacă $a < \infty$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există cel mult un număr finit de termeni mai mari ca $a + \varepsilon$, deci există $n' \in \mathbb{N}$, astfel încât dacă $n \geq n'$ să avem $x_{n+1}/x_n < a + \varepsilon$. De aici se obţine $x_{n'+k+1} < (a+\varepsilon)x_{n'+k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi atunci pentru orice $p \in \mathbb{N}$ vom avea $x_{n'+p} \leq (a+\varepsilon)^p x_{n'}$. Prin urmare $x_n \leq (a+\varepsilon)^{n-n'} x_{n'}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N},\ n \geq n'$, astfel că:

$$\sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{x_{n'}(a+\varepsilon)^{-n'}}(a+\varepsilon).$$

De aici rezultă că $\overline{\lim}\sqrt[n]{x_n} \leq a + \varepsilon$ şi $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, se obţine că $\overline{\lim}\sqrt[n]{x_n} \leq a$.

■ Determinaţi mulţimea punctelor limită ale şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde:

1^o $a_n = \frac{[1-(-1)^n \cdot 2^n + 1]}{2^n + 3}$;

2^o $a_n = \left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)^n$;

3^o $a_n = \frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7}\right]$.

1^o $a_{2n} = \frac{1}{2^n+3}\,,\ a_{2n+1} = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+3}$. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 2$ deci $L(a_n) = \{0, 2\}$.

2^o $L(a_n) = \{-1, 0, 1\}$.

3^o $a_{7k} = 0, a_{7k+1} = \frac{2}{7}, \ldots, a_{7k+6} = \frac{2}{7}$. Se obţine:

$$L(a_n) = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right\}.$$

■ Să se arate că:

1^o $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a > 1 \end{cases}$

2^o $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3^o $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a\,,\ \forall\, a > 0$. Generalizare: Dacă se dă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, x_n > 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x_n} - 1\right) = x$$

4^o $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = \infty$.

5^o $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = \begin{cases} 0\,, & \text{dacă } \alpha < 1 \\ \infty\,, & \text{dacă } \alpha \geq 1 \end{cases}$.

6^0 $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0\,,\ \forall\, a \in (-1, 1)$.

1^o Dacă $a = 1$, afirmaţia este evidentă. Dacă $a > 1$, atunci $a = 1 + \alpha$, cu $0 < \alpha < 1$, deci:

$$a^n = (1+\alpha)^n = 1 + C_n^1\alpha + \cdots + C_n^n\alpha^n > 1 + n\alpha \to \infty \iff \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$$

Dacă $|a| < 1$, fie un $\varepsilon > 0$ şi să găsim un $n_\varepsilon \geq 1$ astfel încât $|a|^n < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_\varepsilon$. Evident: $|a|^n \leq \varepsilon \iff n \ln|a| \leq \ln\varepsilon \iff n \geq \frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$, deoarece $\ln|a| < 0$.

2^o Notăm $x_n = \sqrt[n]{n},\ y_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Evident $y_n > 0\,,\ \forall\, n \geq 1$.

Rezultă: $1 + y_n = \sqrt[n]{n} \iff (1+y_n)^n = n \iff 1 + C_n^1 y_n + C_n^2 y_n^2 + \cdots = n,$ de unde obţinem:

$n \geq C_n^2 y_n^2\,,\ \forall\, n \geq 2$ sau:

$$y_n^2 \leq \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}.$$

Trecând la limită în ultima inegalitate, rezultă: $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, deci: $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

3^o Pentru $a = 1$ avem: $x_n = 0,\ \forall\, n \geq 1$ deci limita este $\ln 1 = 0$.
Pentru $a > 1$ să notăm: $y_n = \sqrt[n]{a} - 1\ (> 0\,,\ \forall\, n \geq 1)$, deci $1 + y_n = \sqrt[n]{a}$.
Prin logaritmarea ultimei relaţii rezultă: $\ln(1 + y_n) = \frac{\ln a}{n}$ sau $n = \frac{\ln a}{\ln(1+y_n)}$.
Atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a}{\ln(1+y_n)} \cdot y_n = \ln a$, deoarece $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.
$$\left(a^{1/n} \to 1,\ \text{pentru}\, n \to \infty\,,\quad \forall\, a > 0\right)$$
iar $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+y_n)}{y_n} = 1$.
Dacă $a < 1$ atunci notând $b = \frac{1}{a} > 1$ avem:
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{b}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\sqrt[n]{b}\right)}{\sqrt[n]{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt[n]{b}-1\right)}{-\sqrt[n]{b}} = -\ln b = \ln\frac{1}{b} = \ln a.$$
Pentru cazul general, se notează : $a_n = n(\sqrt[n]{x_n} - 1)$. Atunci: $\frac{a_n}{n} + 1 = \sqrt[n]{x_n}$.
Deci: $x_n = \left(\frac{a_n+n}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{a_n}}\right)^{\frac{n\cdot a_n}{n}}$ adică:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = e^{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$
Aşadar: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln \lim_{n\to\infty} x_n = \ln x$.

4^o

5^o

6^o Cazul $a = 0$ este banal. Se va considera în continuare că $a \neq 0$. Deoarece $|a| < 1$, există un $b \in \mathbb{R}_+^*$ a.î.: $|a| = \frac{1}{1+b}$ şi deci:
$$|a^n| = |a|^n = \frac{1}{(1+b)^n} = \frac{1}{1+C_n^1 b+C_n^2 b^2+\cdots+b^n} < \frac{1}{C_n^2 b^2} = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{1}{n(n-1)}\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$
Rezultă că: $n \cdot |a|^n < \frac{2}{b^2} \cdot \frac{1}{n-1}\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrar; atunci există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât: $\frac{2}{b^2(n-1)} < \varepsilon\,,\ \forall\, n > n_\varepsilon$.
Deci există $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{b^2\varepsilon} + 1\right]_*$ astfel încât: $n \cdot |a|^n < \varepsilon\,,\ \forall\, n > n_\varepsilon$,
echivalent cu $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ dacă $|a| < 1$.

Observaţie. $[\,.\,]_*: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, unde $[x]_* \leq x < [x]_* + 1\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ este funcţia *parte întreagă*.

■ Să se calculeze limitele următoarelor şiruri.

1^o $x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\,,\ n \in \mathbb{N}^*$.

2^o $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+k}} - a\sqrt{n}\,,\ k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ a \in \mathbb{R}$.

3^o $x_n = \frac{n}{(n!)^2}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$.

4^o $x_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}\ ,\ a > 0$.

5^o $x_n = \frac{a^n}{n!}\ ,\ a \in \mathbb{R}_+^*$.

6^o $x_n = \frac{n^k}{a^n}\ ,\ a > 1\,,\ k > 0$.

7^o $x_n = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$.

5^o $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

6^o $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \in (0,1)$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

7^o $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)(2n+4)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)(3n+4)}}{\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{3n+4} = \frac{2}{3} \in (0,1)$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

■ Să se demonstreze că următoarele şiruri sunt fundamentale:

1^o $\quad x_n = \frac{n+2}{3n+5}$, $n \in \mathbb{N}$.

2^o $\quad a_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2}$, $n \geq 1$.

3^o $\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k(k+1)}$.

1^o $\quad \left|x_{n+p} - x_n\right| = \frac{p}{(3n+3p+5)(3n+5)} < \frac{p}{3p(n+5)} = \frac{1}{3(3n+5)}$ şi majorantul este un şir convergent la zero, al cărui termen general depinde de p deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir fundamental.

2^o $\quad$ Avem: $\left|a_{n+p} - a_n\right| = \frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq$

$\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$,

pentru orice $p \geq 1$.

3^o $\quad$ Avem:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k(k+1)}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\sin k!|}{k(k+1)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1},$$

pentru orice $n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Observaţie. Limita $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a acestui şir nu se poate determina cu exactitate. Pentru a determina o valoare aproximativă, cu o eroare mai mică decât 10^{-3} (de exemplu) observăm că $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow n+1 > 10^3 \Leftrightarrow n > 10^3 - 1$. Prin urmare, cel mai mic n pentru care $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3}$ este 10^3. Deci $a \approx a_{1.000}$.

■ $\quad$ Să se demonstreze că următoarele şiruri nu sunt fundamentale:

1^o $\quad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

2^o $\quad x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3^o

1^o $\quad a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \underbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}}_{de\ n\ ori} = \frac{1}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că şirul nu este fundamental, deci nici convergent.

2^o $\quad \left|x_{n+p} - x_n\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+p}}$. Se observă că pentru $p = n$ se obţine

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} > \frac{1}{\sqrt{n+n}} + \frac{1}{\sqrt{n+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Rezultă de aici că $|x_{2n} - x_n|$ nu tinde către zero, deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este şir fundamental.

3^o

■ $\quad$ Să se demonstreze că dacă $\sin x \neq 0$, atunci şirul $(\sin x)_{n\geq 0}$ nu are limită.

Să presupunem că şirul $(\sin x)_{n\geq 0}$ este convergent. Din:

$$\cos nx = \frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{2\sin x}$$

rezultă că: $\quad \lim_{n\to\infty} \cos nx = 0$.

Ţinând seama de relaţia:

$$\sin nx = \frac{\cos(n+1)x - \cos(n-1)x}{2\sin x},$$

deducem că $\quad \lim_{n\to\infty} \sin nx = 0$, prin urmare $\lim_{n\to\infty} (\sin^2 nx + \cos^2 nx) = 0$, contradicţie. Rezultă că şirul $(\sin x)_{n\geq 0}$ este divergent.

■ $\quad$ Să se demonstreze că:

1^o $\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}\right) = \ln k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$;

2^o $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$

1^o Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{kn}-\ln(kn)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln k\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(b_{nk}-b_n+\ln k)=\gamma-\gamma+\ln k=\ln k,$$

unde: $b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ ,\ \forall\, n\geq 1\,.$

2^o Conform identităţii lui **Catalan**, avem:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\ ,\ \forall n\geq 1.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2,$$

conform 1^o.

■ Utilizând teorema lui **Toeplitz**, să se demonstreze că:

1^o $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n;$

2^o Dacă $x_n>0\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$, atunci : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

1^o Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in\mathbb{R}$, atunci, considerând în teorema lui **Toeplitz**, $p_{nk}=\frac{1}{n},\forall\, n,k\in\mathbb{N}^*$, obţinem:

$$t_n=\sum_{k=1}p_{nk}x_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2^o Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in\mathbb{R}_+$, atunci se consideră: $p_{nk}=\frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\ ,\ \forall\, k\in\{1,2,\ldots,n\},\ n\in\mathbb{N}^*.$

Cazul $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ se tratează separat astfel:

2^o Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$ şi atunci din teorema lui **Toeplitz**, se obţine:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=0,\quad\text{adică:}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=+\infty.$$

Într-adevăr, dacă în teorema lui **Toeplitz** înlocuim $p_{nk}=\frac{1}{n}\ ,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*\ ,\ k\in\{1,2,\ldots,n\}$, iar în loc de x_n punem $\frac{1}{x_n}$, rezultă:

$$t_n=\sum_{k=1}^{n}p_{nk}\cdot\frac{1}{x_k}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0.$

1^o Deoarece pentru $\forall\, x_n>0,\ n\in\mathbb{N}^*$ avem:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

aplicând punctul precedent, din $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ rezultă:

$$+\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

■ Folosind teorema **Stolz–Cesàro**, să se determine limitele şirurilor cu termenul general:

1^o $a_n=\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$ 2^o $a_n=\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\ ,\ k\in\mathbb{N}^*$ 3^o $a_n=\frac{\ln n!}{n^m},\ m\in\mathbb{N}$

4^o $a_n=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{n^{k+1}}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^k\right)$ 5^o $a_n=n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2\right).$

6^o $a_n=\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\ n\geq 2\,;$ 7^o $a_n=\frac{1}{\ln(\ln n)}\left(\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}\right),\ n\geq 3\,;$

8^o $a_n=\frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right),\ \alpha\in(0,1).$ 9^o $a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}\,.$

1^o Notăm $x_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ şi $y_n = n$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$.

2^o Se va considera $x_n = 1^k+2^k+\cdots+n^k$ şi $y_n = n^{k+1}$. Se va obţine $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$, unde la numitor s-a efectuat descompunerea cu ajutorul binomului lui **Newton**.

3^o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)!-\ln n!}{(n+1)^m-n^m} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{C_m^1 n^{m-1}+C_m^2 n^{m-2}+\cdots+1} = \begin{cases}+\infty, & \text{dacă } m\in\{0,1\}\\ 0, & \text{dacă } m\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\end{cases}$

4^o Se consideră şirurile cu termenii generali:

$$a_n = 1^k+2^k+\cdots+n^k,\quad b_n = n^{k+1}.$$

Se obţine: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$. Va rezulta limita: $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$.

5^o Se consideră:

$$x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2\,,\qquad y_n = \frac{1}{n}.$$

Condiţiile celei de-a doua teoreme a lui **Cesaro-Stolz** sunt verificate şi avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{4}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}$.

6^o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

7^o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

8^o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-\alpha}$.

9^o $a_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}$, $b_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

■ Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = b$, $a,b>0$, atunci pentru orice $p\ge 0$, $q\ge 0$ cu $p+q=1$, are loc relaţia:

$$\lim_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)^n = a^p b^q.$$

Arătăm mai întâi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. De aici deducem că: $\lim\limits_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)^n = 1$.

Apoi avem:

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n-1) = \ln a\,,\qquad \lim_{n\to\infty} n(b_n-1) = \ln b$$

şi în continuare:

$$\lim_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(pa_n+qb_n-1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}[pn(a_n-1)+qn(b_n-1)]} = e^{p\ln a+q\ln b} = a^p b^q.$$

■ Dacă notăm cu a limitele şirurilor de la exerciţiul:

1^o Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie descrescătoare şi mărginită superior. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ de termen general:

$$a_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

este convergent.

atunci să se calculeze limitele:

1^o $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-a\right)$;

2^o $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n\left(\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}-\ln(\ln n)-a\right)$;

3^o $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}-a\right)$, $\alpha\in(0,1)$;

4^o $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}-a\right)$, $\alpha>1$.

Se aplică teorema a doua a lui **Stolz-Cesaro**.

1^o $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-a$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n\ge 1$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}}\frac{\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)+\ln x}{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+1/x}{-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2};$$

2^o Se obţine limita 1.

3^o $$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}-a\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\right]}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{n\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\alpha-\left[(n+1)-n\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\right]}{(1-\alpha)\frac{n^\alpha-(n+1)^\alpha}{n^\alpha}} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{(1-\alpha)x-(1+x)+(1+x)^\alpha}{x[1-(1+x)^\alpha](1-\alpha)} = \frac{1}{2}.$$

4^o Se obţine limita $\frac{1}{1-\alpha}$.

■ Să se calculeze limitele:

1^o $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1}$.

2^o $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n+2}$.

1^o $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\frac{2}{2n-1}(n+1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n-1}} = e^2$$

2^o $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}}\right]^{\frac{-2}{2n^2+n+1}(n+2)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2-4n}{2n^2+n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

■ Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci

1^o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$.

2^o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$, $\forall\, a>0$.

3^o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^k-1}{x_n} = k$, $\forall\, k\in\mathbb{R}$.

Se aplică propoziţia #o4y .

■ Să se demonstreze că
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0, \qquad k>0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)^k-n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1}{n^k}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{n^k} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1}{n}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1}} = 1\cdot\frac{1}{k}\cdot 0 = 0.$$

Observaţie. Exerciţiul indică faptul că funcţia putere creşte mai rapid către $+\infty$ decât funcţia logaritmică.

■ Să se calculeze:
$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}} - e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\right).$$

Fie $\quad c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Avem:

$$x_n = e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}} - e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = e^{c_n+\ln n}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = e^{c_n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}.$$

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = e^{\gamma}$, unde γ este *constanta lui* ***Euler***.

■ Să se studieze convergenţa şirului:

$$1,\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}},\dots\ .$$

Termenii şirului se obţin cu relaţia de recurenţă: $\quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}\,,\ x_1 = 1\,,\ n = 1,2,\dots$

Din relaţia: $\quad x_{n+1}^2 - x_n^2 = (1+x_n) - (1+x_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$

rezultă prin inducţie că şirul este crescător. De asemenea, din $x_{n+1}^2 = 1 + x_n$ avem:

$1 < x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n+1} < \frac{1+x_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_{n+1}} < 2,\quad$ deci şirul este monoton şi mărginit.

Aşadar, şirul este convergent, fie $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Din relaţia de recurenţă se obţine: $\quad x = \sqrt{1+x}$.

Deci x este rădăcina ecuaţiei $z^2 = 1 + z$, adică $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observaţie. Această problemă poate fi privită şi sub următorul aspect: fiind dat $\varepsilon > 0$, să se găsească valoarea aproximativă a soluţiei pozitive a ecuaţiei $x^2 = 1 + x$, cu o eroare mai mică decât ε.

Aceasta revine la a găsi un şir (x_n) care converge la rădăcina căutată x.

■ Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi $f: I \to I$. Definim şirul $(a_n)_{n\ge 0}$ prin relaţia $a_{n+1} = f(a_n),\ n \ge 0,\ a_0 \in I$. Să se arate că:

1^o Dacă f este crescătoare, atunci $(a_n)_{n\ge0}$ este monoton;

2^o Dacă f este descrescătoare, atunci şirurile $(a_{2n})_{n\ge0},\ (a_{2n+1})_{n\ge0}$ sunt monotone şi au monotonii diferite.

1^o Dacă $a_0 \le a_1$ rezultă că $f(a_0) \le f(a_1)$, adică $a_1 \le a_2$ şi apoi prin inducţie se arată că $a_n \le a_{n+1}$ pentru orice $n \ge 1$. Dacă $a_0 \ge a_1$ rezultă analog că şirul este descrescător.

2^o Avem:

$$a_{2n+1} = f(a_{2n+1}) = (f\circ f)(a_{2n}),\qquad n \ge 0$$

$a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = (f\circ f)(a_{2n}),\ n \ge 0.$

Cum $g = f\circ f$ este crescătoare, din punctul 1^o rezultă că $(a_{2n})_{n\ge0},\ (a_{2n+1})_{n\ge0}$ sunt şiruri monotone. Dacă presupunem că $(a_{2n})_{n\ge0}$ este crescător, din relaţia $a_{2n} \le a_{2n+2}$ obţinem $f(a_{2n}) \ge f(a_{2n+1})$ echivalent cu $a_{2n+1} \ge a_{2n+3},\ n \ge 0$, ceea ce arată că $(a_{2n+1})_{n\ge0}$ este descrescător. Presupunerea că $(a_{2n})_{n\ge0}$ este descrescător conduce în mod analog la faptul că $(a_{2n+1})_{n\ge0}$ este crescător. Deci şirurile $(a_{2n})_{n\ge0},\ (a_{2n+1})_{n\ge0}$ au monotonii diferite.

■ Fie $(a_n)_{n\ge1}$ şi $(b_n)_{n\ge1}$ două şiruri de numere întregi cu proprietatea $0 < a_n \le b_n,\ b \ge 1$. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b}\prod_{k=a_n}^{b_n} e^{\frac{1}{k}} = 1\,.$$

$$\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\prod_{k=a_n}^{b_n} e^{\frac{1}{k}}\right) = \sum_{k=a_n}^{b_n}\frac{1}{k} + \ln a_n - \ln b_n = \left(\sum_{k=1}^{b_n}\frac{1}{k} - \ln b_n\right) - \left(\sum_{k=1}^{a_n}\frac{1}{k} - \ln a_n\right) + \frac{1}{a_n} \to c - c + 0 = 0\,.$$

■ Demonstraţi că:

$$\lim_{n\to\infty}\left[1000\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots\sqrt{n}}}\right] = 1757.$$

Considerăm şirurile:

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots\sqrt{n}}}\,,\qquad b_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots\sqrt{n+\sqrt{2n}}}}\,.$$

Se arată că (a_n) este crescător, iar (b_n) este descrescător şi $a_n < b_n,\ n \ge 5$, prin urmare:

$$1{,}7575 < a_6 < \lim_{n\to\infty} a_n < b_6 = 1{,}7579\,.$$

■ Fie $a, b > 0$ şi $(x_n)_{n\ge1}$, $(y_n)_{n\ge1}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^a} = A, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n^b} = B\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdot(y_1+y_2+\cdots+y_n)}{n(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)}\,.$$

$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdot(y_1+y_2+\cdots+y_n)}{n(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)} = \frac{\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n^{a+1}}\cdot\dfrac{y_1+y_2+\cdots y_n}{n^{b+1}}}{\dfrac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{n^{a+b+1}}}\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n^{a+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{(n+1)^{a+1}-n^{a+1}} = \frac{A}{a+1}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots y_n}{n^{b+1}} = \frac{B}{b+1}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{n^{a+b+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}y_{n+1}}{(n+1)^{a+b+1}-n^{a+b+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x_{n+1}}{(n+1)^a}\cdot\dfrac{y_{n+1}}{(n+1)^b}}{\dfrac{(n+1)^{a+b+1}-n^{a+b+1}}{(n+1)^{a+b}}} = \frac{AB}{a+b+1}\,.$$

Limita cerută este:

$$\frac{a+b+1}{(a+1)(b+1)}\,.$$

■ Demonstraţi că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\,,\ a \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{n^2} = \frac{a}{2}\,.$$

Se aplică teorema lui **Toeplitz** cu $a_{nk} = \frac{2(n-k+1)}{n^2}$ sau se aplică teorema **Stolz-Cesaro** de două ori.

■ Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\,,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b\,,\ a, b \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n} = ab.$$

Dacă $b \ne 0$, luăm $a_{nk} = \frac{b_{n-k+1}}{nb}$ în teorema lui **Toeplitz**.

Dacă $b = 0$, punând $a_{nk} = \frac{1+b_{n-k+1}}{n}$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1+b_{n)}+a_2(1+b_{n-1})+\cdots+a_n(1+b_1)}{n} = a$$

şi ţinând seama că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$, rezultă concluzia.

■ Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in \mathbb{R}$. Să se calculeze:

1^o $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}+\frac{a_{n-1}}{2}+\cdots+\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$;

2^o $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1\cdot2}+\frac{a_2}{2\cdot3}+\cdots+\frac{a_n}{n(n+1)}\right)$;

3^o $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}-\frac{a_{n-1}}{2}+\cdots(-1)^{n-1}\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$.

Se obţin, aplicând teorema lui **Toeplitz**, rezultatele: $2a,\ a,\ \frac{2}{3}a$.

Serii

Noţiunea de serie de numere reale a apărut din necesitatea de a da un sens natural sumei termenilor unui şir de numere reale. Deoarece nu se pot aduna (în sens algebric) o infinitate de numere reale, realizarea acestui scop a fost posibilă numai cu ajutorul noţiunii de limită, numai în anumite cazuri, studiul seriilor îmbinând studiul sumelor finite cu cel al limitelor de şiruri.

■ **0.6..** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de elemente din $\mathbb{R}$. Atunci $(s_n)_{n\geq 1}$, unde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$, se numeşte *serie de termen general* a_n. Elementele şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ se numesc *termenii seriei*, iar elementele şirului $(s_n)_{n\geq 1}$ se numesc *sumele parţiale* ale seriei date.
Seria se mai poate nota: $\sum_{n\geq 1} a_n$ sau $\sum_n a_n$ sau $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sau $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

O serie de numere reale $\sum_{n\geq 1} a_n$ se numeşte *convergentă* dacă şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Limita a a şirului $(s_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *suma seriei* şi se scrie $a = \sum_{n\geq 1} a_n$.
Dacă $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (respectiv $-\infty$), vom spune, prin abuz de limbaj, că suma seriei este egală cu $+\infty$ (respectiv $-\infty$) şi vom scrie $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$ (respectiv $-\infty$).
O serie care nu este convergentă se numeşte *divergentă*.

Observaţii.
1^o S-a notat prin $\sum_{n\geq 1} a_n$ atât seria de termen general a_n, cât şi suma s a acestei serii care are sens doar în cazul în care $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ există (finită sau infinită).
2^o Problema principală în studiul unei serii este determinarea naturii şi, în caz de convergenţă, evaluarea măcar aproximativă a sumei seriei.
3^o Seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă dacă şi numai dacă este satisfăcută una din relaţiile:

- $(s_n)_{n\geq 1}$ nu are limită;
- $s_n \to -\infty$;
- $s_n \to +\infty$.

4^o În studiul unei serii, rolul principal este jucat de şirul sumelor parţiale, care sunt sume finite. Prin trecerea la limită se pierd o seamă de propietăţi ale sumelor finite. astfel, la sumele seriilor nu avem comutativitate, asociativitate; seriile nu pot fi, în general, înmulţite.
5^o Dacă se renunţă la un număr finit de termeni ai unei serii (sau dacă se adaugă un număr finit de termeni) seria nou obţinută va avea aceeaşi natură ca şi seria iniţială. În caz de convergenţă, suma se modifică scăzând (sau adăugând) suma finită a termenilor la care se renunţă (respectiv, care se adaugă).
6 În unele formule se utilizează şi produse infinite: $\prod_{n\geq 1} z_n$.
Un astfel de produs se numeşte convergent, dacă şirul: $\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)_{n\geq 1}$ are o limită finită; uneori prin logaritmare se trece la serii.

Să se demonstreze că:
1^o UtUuFS5D → *Seria geometrică de raţie* q şi anume
$$\sum_{n\geq 0} q^n$$
este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$.
2^o *Seria armonică* şi anume:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$
este divergentă şi are suma $+\infty$.

1^o Sumele parţiale asociate sunt:

$$s_0 = 1, \qquad s_1 = 1 + q, \qquad s_2 = 1 + q + q^2, \dots, s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n, \dots$$

Se demonstrează prin inducţie că:

$$\begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ dacă şi numai dacă $q \in (-1, 1)$, rezultă că seria geometrică de raţie q este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi, în acest caz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

2^o Presupunem seria convergentă şi fie s suma sa. Punem: $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \geq 1)$. Avem:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \; \forall\, n \geq 1,$$

deci $s_{2n} \geq \frac{1}{2} + s_n \; \forall\, n \geq 1$, de unde prin trecere la limită, $n \to \infty$, obţinem: $s \geq \frac{1}{2} + s$, absurd.

■ Fie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

o serie dată. Dacă se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială, putându-se modifica în schimb suma sa, dacă seria este convergentă. Dacă suma seriei este $+\infty$ sau $-\infty$, aceasta nu se modifică.

Presupunem că se elimină termenii $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ seria obţinută prin modificare şi fie $(T_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale. Atunci $y_n = x_{n+k}$ pentru orice $n > n_k - k$, iar

$$T_n = S_{n+k} - (x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k}) \text{ pentru orice } n > n_k - k.$$

Cum şirurile $(T_n)_{n\geq 0}$ şi $(S_{n+k})_{n\geq 0}$

■ Dacă seriile numerice

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sunt convergente şi au respectiv sumele s şi t, atunci seriile:

1^o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ – seria sumă celor două serii;

2^o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ – seria diferenţă celor două serii;

3^o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ – seria produsul cu o constantă $\lambda \in \mathbb{R}$ a seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

sunt convergente şi au respectiv sumele: $s + t$, $s - t$, $\lambda \cdot s$.

1^o Fie

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{şi} \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

sumele parţiale de rang n ale celor două serii.

Deoarece $s_n \to s$, iar $t_n \to t$ rezultă că $\sigma_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$ converge la $s + t$.

2^o Suma parţială a seriei diferenţă este $\tau_n = s_n - t_n$ şi evident $\tau_n \to s - t$.

3^o Suma parţială de rang a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ este $\lambda \cdot s_n$ şi $\lambda \cdot s_n \to \lambda \cdot s$.

Observaţie. Suma a două serii divergente nu este neapărat divergentă. Ca exemplu, se pot considera seriile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

care sunt oscilante. Suma acestora este seria identic nulă şi deci convergentă.

■ Spunem că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

este o <u>*serie telescopică*</u> dacă există şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, astfel ca:

$$x_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$$

pentru orice $n \geq 0$, adică există un şir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferenţa a doi termeni consecutivi ai acestui şir.

Să se demonstreze că, în acest caz,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = a_0 - l\,,$$

unde $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Într-adevăr,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

■ (*Criteriul necesar de convergenţă*) Fie seria $\sum_{n\geq 0} u_n$.

1^o Dacă seria este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

2^o Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ nu există sau există dar este nenulă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este divergentă.

1^o Fie $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = s_{n-1} + u_n$

deci $u_n = s_n - s_{n-1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Conform ipotezei, există $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (suma seriei).

Deci: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$.

2^o Rezultă din punctul precedent prin reducere la absurd.

Observaţie. Reciproca este falsă, aşa cum se vede în cazul seriei: $\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

În acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$, iar seria este divergentă deoarece: $s_n = \sqrt{n+1} \to \infty$.

■ (*Criteriul general al lui **Cauchy** pentru serii*). O serie numerică $\sum_{n\geq 0} u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ natural astfel încât $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$ şi $\forall\, p \geq 1$, $\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$.

Fie $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ deci $s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$ $(n \geq 0,\ p \geq 1)$.

Concluzia rezultă din următorul şir de echivalenţe logice:

seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ şirul (s_n) este convergent $\Leftrightarrow$ şirul (s_n) este fundamental

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon),\ p \geq 1,\ \left|s_{n+p} - s_n\right| < \varepsilon$.

■ *Seria armonică* $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ este divergentă. $< -$ UtUuFS5D

Presupunem că seria este convergentă şi alegem $\varepsilon = \frac{1}{3}$ şi luăm $n = N$ şi $p = N$. Rezultă: $u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_{2N} < \frac{1}{3}$.

Deci: $\frac{1}{3} > \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} > \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} \ldots + \frac{1}{2N}}_{N \text{ termeni}} = \frac{1}{2}$, absurd.

■ (*Criteriul lui **Abel***) Fie $\sum_{n\geq 0} u_n$ o serie numerică având şirul sumelor parţiale mărginit. Atunci pentru orice şir $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de numere reale pozitive, monoton descrescător cu limita zero (se mai scrie $\alpha_n \downarrow 0$), seria $\sum_{n\geq 0} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Fie $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$; conform ipotezei, $\exists\, M > 0$, $|s_n| \leq M$, pentru orice $n \geq 0$. Avem:

$$\left|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p-1}u_{n+p-1} + \alpha_{n+p}u_{n+p}\right| =$$

$$= \left|\alpha_{n+1}\,(s_{n+1} - s_n) + \alpha_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \cdots + \alpha_{n+p-1}\big(s_{n+p-1} - s_{n+p-2}\big) + \alpha_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1}\right| =$$

$$= \left| -\alpha_{n+1}s_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})s_{n+1} + \cdots + \big(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}\big)s_{n+p-1} + \alpha_{n+p}s_{n+p}\right| \leq$$

$$\leq M\left(|-\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}| + \cdots + \left|\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}\right| + \left|\alpha_{n+p}\right|\right).$$

Dar $\forall\, k,\ \alpha_k - \alpha_{k+1} \geq 0$, deoarece şirul (α_n) este monoton descrescător. Va rezulta că:

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \le M(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p} + \alpha_{n+p}) = 2M\alpha_{n+1}.$$

Fie acum un $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $\alpha_{n+1} \to 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $\forall\, n \ge N(\varepsilon)$, $\alpha_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}$ deci $\forall\, p \ge 1$, deci $|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \le 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$.
Conform criteriului general al lui **CAUCHY**, seria $\sum_{n\ge 0}\alpha_n u_n$ este convergentă.

■ (*Criteriul lui* ***LEIBNIZ***). Fie $\alpha_n \downarrow 0$ un şir monoton descrescător de numere reale pozitive cu limita zero. Atunci seria alternantă: $\sum_{n\ge 0}(-1)^n\alpha_n = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots$ este convergentă.

În criteriul lui **ABEL** luăm $u_n = (-1)^n$; şirul sumelor parţiale $1, 0, 1, 0, \ldots$ este mărginit.

■ Să se arate că următoarele serii sunt convergente:

1^o $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (*seria armonică alternantă*);

2^o $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Se aplică criteriul lui **LEIBNIZ**.

■ (*Criteriul raportului a lui* ***D'ALEMBERT***). Fie $\sum_{n\ge 0} a_n$ o serie de numere reale strict pozitive şi notăm:

$$l^* = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad l_* = \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Atunci:

1^o Dacă $l^* < 1$, seria $\sum_{n\ge 0} a_n$ este convergentă;

2^o Dacă $l_* > 1$, seria $\sum_{n\ge 0} a_n$ este divergentă;

3^o Dacă $l_* \le 1$ sau $l^* \ge 1$, natura seriei este nedeterminată.

1^o Fie $l^* < 1$ şi $0 < \varepsilon < 1 - l^*$ fixat, deci $\rho := l^* + \varepsilon < 1$.

2^o

3^o

■ O serie numerică $\sum_{n\ge 0} u_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria de numere reale şi pozitive $\sum_{n\ge 0}|u_n|$ este convergentă.

Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Se ţine cont de inegalitatea: $|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}|$ şi se aplică de două ori criteriul lui **CAUCHY**.

Observaţie. Reciproca este falsă, un exemplu constituindu-l seria armonică alternantă, care este convergentă dar nu este absolut convergentă.

■ Fie $\sum_{n\ge 0} a_n$ şi $\sum_{n\ge 0} b_n$ două serii de numere reale. Se numeşte *serie produs (produs convolutiv)* al celor două serii, seria următoare $\sum_{n\ge 0} c_n$, unde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ $(n \ge 0)$.

Fie $(a_n)_{n\ge 0}$ un şir de numere reale convergent la 0 şi $\sum_{n\ge 0} b_n$ o serie absolut convergentă de numere reale. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat şi $M := \sum_{n\ge 0}|b_n|$. Deoarece $a_n \to 0, \exists\, N \ge 1$ a.î. $|a_n| \le \frac{\varepsilon}{2M}$, $\forall\, n \ge N$. Deoarece $b_n \to 0$ $\exists\, N' \ge N$ a.î.

$$|b_n| \le \left(2\sum_{n=0}^{N}|a_i|\right)^{-1}\cdot\varepsilon, \qquad \forall\, n \ge N'$$

Atunci $\forall\, n \ge 2N'$, avem $n - k \ge N'$, $\forall\, k = \overline{0, N}$, deci

$$|(a_0 b_n + \cdots + a_N b_{n-N}) + (a_{N+1}b_{n-N-1} + \cdots + a_n b_1)| \le \left(\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right)\left(2\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right)^{-1}\cdot\varepsilon +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot\sum_{i=0}^{n-N-1}|b_i| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M = \varepsilon.$$

Prin urmare, $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \to 0 \ (n \to \infty)$.

■ (*Teorema lui* ***Mertens***). Fie $\sum_{n\geq 0} a_n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n$ două serii de numere reale, una convergentă, cealaltă absolut convergentă.
Atunci seria produs a celor două serii este o serie convergentă şi are suma egală cu produsul sumelor seriilor date:

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right).$$

Presupunem că prima serie este absolut convergentă şi a două convergentă. Să notăm:

$$a \coloneqq \sum_{n\geq 0} a_n\ , \qquad b \coloneqq \sum_{n\geq 0} b_n\,, \qquad A_n := \sum_{i=0}^{n} a_i\,, \qquad B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i$$

$$r_n \coloneqq b - B_n, \qquad c_i \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\ , \qquad C_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} c_i.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} &C_n = a_0 b_0 + \\ &+a_0 b_1 + \ a_1 b_0 + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0. \end{aligned}$$

însumând pe coloane obţinem:

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0$$

deci:

$$\begin{aligned} C_n &= a_0(b - r_n) + a_1(b - r_{n-1}) + \cdots + a_n(b - b_0) = \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)b - (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \cdots + a_n r_0) = A_n b - (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \cdots + a_n r_0) \end{aligned}$$

şi deci:

$$ab - C_n = (a - A_n)b + \sum_{i=0}^{n} r_i a_{n-i}. \quad (1)$$

Deoarece $A_n \to a$, avem $(a - A_n)b \to 0$. Se aplică exerciţiul precedent şirului $(r_n)_{n\geq 0}$ care converge la 0 şi seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$ şi se deduce că $\sum_{i=0}^{n} r_i a_{n-i} \to 0 \ (n \to \infty)$.
Din (1) rezultă că $ab - C_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$, prin urmare seria $\sum_{n\geq 0} c_n$ este convergentă şi are suma ab.

■ (*Teorema lui* ***Cauchy***). Fie $\sum_{n\geq 0} a_n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n$ două serii absolut convergente de numere reale. Atunci seria produs ale celor două serii este absolut convergentă.

Se aplică teorema lui **Mertens** seriilor $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ şi $\sum_{n\geq 0} |b_n|$ şi rezultă că seria:

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i b_{n-i}|\right)$$

este convergentă. Deoarece

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i b_{n-i}|, \qquad \forall\, n \geq 0$$

rezultă, conform criteriului comparaţiei, că seria

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i b_{n-i}|\right)$$

este convergentă, ceea ce înseamnă că seria

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)$$

este absolut convergentă.

Serii. Exerciţii

■ Demonstraţi că seriile de mai jos sunt convergente şi determinaţi sumele acestora:

1^o $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\cdots;$

2^o $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots;$

3^o $\frac{1}{1(m+1)}+\frac{1}{2(m+2)}+\cdots+\frac{1}{n(m+n)}+\cdots,$ unde $m\in\mathbb{N}$.

1^o Avem:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Deci: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1.$

2^o Avem:

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$2S_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Rezultă: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{4}.$

3^o Avem:

$$mS_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}\right).$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

■ Să se demonstreze următoarele:

1^o Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ este convergentă şi are suma 1.

2^o Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ este convergentă şi are suma ≤ 2.

3^o Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă.

4^o Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă şi $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty$.

5^o Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ este divergentă şi $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=+\infty$.

6^o Seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}$ este divergentă.

1^o Avem:

$$s_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}\ \forall\, n\geq 1.$$

Cum $\frac{1}{2^n}\to 0\ \ (n\to\infty)$, rezultă $s_n\to 1$, deci $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}=1$.

2^o $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\ \ \forall\, n\geq 1,$

deci: $s_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=2-\frac{1}{n}<2\ \ \forall\, n\geq 1.$

3^o Fie $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ $(n \geq 1)$ şi $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $\forall\, n, p \geq 1$ avem:

$$|s_{n+p} - s_n| = |(-1)^{n+2}| \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right) < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p},$$

deci: $|s_{n+p} - s_n| < \frac{2}{n+1} < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_\varepsilon := 1 + E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \wedge p \geq 1$.

Aşadar $(s_n)_{n\geq 1}$ este şir **CAUCHY**, deci convergent.

4^o

5^o

6^o

■ Demonstraţi divergenţa seriei cu termenul general: $\frac{1}{a+nb}$.

Dacă se amplifică fiecare termen cu b, punând $a = \alpha b$, se obţine seria:

(I) $\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+2}, \dots, \frac{1}{\alpha+n},$

ai cărei termeni sunt mai mari decât ai seriei:

(II) $\frac{1}{h+1}, \frac{1}{h+2}, \dots, \frac{1}{h+n},$

unde h este un număr întreg mai mare decât α.

Dar (II) este de fapt seria armonică din care lipeşte un număr finit de termeni.

Aşadar, seria iniţială este divergentă.

Concluzia rămâne valabilă chiar şi pentru $\alpha < 0$.

■ Demonstraţi relaţiile:

1^o $\sum_{p=1}^{n} p x^p = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$;

2^o $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = \frac{1}{3x(x+1)(x+2)}$;

3^o $(1+x)^{-\mu} = 1 - \mu x + \cdots + (-1)^p \cdot \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+p-1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot p}\, x^p + \cdots,$ unde $\mu \in \mathbb{N},\ x < 1$.

1^o Vom verifica valabilitatea relaţiei pentru $n = 1$ şi $n = 2$ şi apoi, presupunând că aeasta este valabilă pentru un n, este valabilă şi pentru $n+1$.

Dacă vom face ca n să crească în mod indefinit, se vede că primul membru creşte indefinit pentru $x < 1$.

Să studiem limita expresiei: $n x^{n+2} - n x^{n+1} = n x^n (x^2 - x)$ sau de fapt a lui $n x^n$.

Notând $x = \frac{1}{1+z}$, cu $z > 0$, se vede că această limită este cea a lui:

$$\frac{n}{1 + nz + \frac{n(n-1)}{2} z^2 + \cdots},$$

adică zero. Aşadar, limita cerută este $\frac{x}{(1-x)^2}$.

2^o Fie: $f(x) = \frac{1}{3x(x+1)(x+2)}$.

Rezultă:

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)};$$
$$f(x+1) - f(x+2) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(x+n) - f(x+n+1) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}.$$

Se adună aceste egalităţi membru cu membru şi se face $n \to \infty$.

3^o Se verifică relaţia pentru $\mu = 1$ şi $\mu = 2$. Se presupune acum că este valabilă pentru o valoare μ. Se notează:

$$a_p = \frac{\mu\,(\mu+1)\dots(\mu+p-1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot p}.$$

Avem: $(1+x)^{-\mu} = 1 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^p a_p x^p + \cdots$.

Pentru $\mu = 1$, $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^p x^p + \cdots$.

Produsul primilor membri ai acestor egalităţi este $(1+x)^{-(\mu+1)}$, iar ai membrilor din dreapta au termenul general:

$$(-1)^p \cdot 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p x^p.$$

Pe de altă parte:

$$(1)\ 1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot p}=\frac{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot p}.$$

Drept consecinţă:

$$(1+x)^{-(\mu+1)}=1-(\mu+1)x+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2}x^2-\cdots+(-1)^p\frac{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+p)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot p}x^p+\cdots$$

Aşadar, relaţia rămâne valabilă şi dacă înlocuim pe μ cu $\mu+1$.

■ Să se arate că dacă $p,q\in\mathbb{N}^*$, $p<q$, au loc relaţiile:

1^o $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=pn}^{qn}\frac{1}{k}=\ln\frac{q}{p}$;

2^o $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=p^n}^{q^n}\frac{1}{k}=\ln\frac{q}{p}$;

3^o $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n^p}^{n^q}\frac{1}{k}=q-p$;

4^o $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=p^n}^{q^n}\frac{1}{k\cdot\ln k}=\ln\left(\ln\frac{q}{p}\right)$;

3^o $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n^p}^{n^q}\frac{1}{k\cdot\ln k}=\ln\frac{q}{p}$.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $n\geq 1$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir cu proprietatea că şirul $(s_n-b_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Dacă $(p_n)_{n\geq 1}$, $(q_n)_{n\geq 1}$ sunt două şiruri de numere naturale, $p_n\leq q_n$ pentru $n\geq 1$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=p_n}^{q_n}a_k=s_{q_n}-s_{p_n}+a_{p_n}=\left(s_{q_n}-b_{q_n}\right)-\left(s_{p_n}-b_{p_n}\right)+\left(b_{q_n}-b_{p_n}\right)+a_{p_n}.$$

De aici obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=p_n}^{q_n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left[\left(b_{q_n}-b_{p_n}\right)+a_{p_n}\right]$$

în ipoteza că limita din dreapta există.

1^o $p_n=pn,\ q_n=qn,\ b_n=\ln n,$

$$\lim_{n\to\infty}(\ln qn-\ln pn)=\ln\frac{q}{p}.$$

2^o $p_n=p^n,\ q_n=q^n,\ a_k=\frac{1}{k},\ b_n=-\ln n$.

Pentru $3^o,4^o$ se procedează în mod similar.

■ Să se calculeze cu trei zecimale exacte suma seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,n}.$$

Deoarece

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{m+1}$$

pentru $n\geq m$, putem lua:

$$\alpha(m)=\frac{1}{m+1}$$

şi vom pune condiţia ca

$$\frac{\alpha(m)}{1-\alpha(m)}u_m=\frac{1}{m!\,m}<10^{-3},$$

de unde rezultă $m\geq 5$. Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_5=1+\frac{1}{2!\,2}+\frac{1}{3!\,3}+\frac{1}{4!\,4}+\frac{1}{5!\,5}\approx 1{,}3176.$$

Pentru calculul erorii, vom presupune că există $m\in\mathbb{N}^*$ şi $0<\alpha(m)<1$ astfel încât:

$$\sqrt[n]{u_n}\leq\alpha(m)<1,\qquad\forall\,n\geq m.$$

Atunci avem:

$$r_m\leq\frac{\alpha(m)}{1-\alpha(m)}u_m.$$

Aceasta deoarece:

$$r_m=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots\leq[\alpha(m)+\alpha^2(m)+\cdots]u_m=\frac{\alpha(m)}{1-\alpha(m)}u_m.$$

■ Dându-se seria convergentă:

$$1, \quad \frac{x}{a+h_1}, \quad \frac{x(x+h_1)}{(a+h_1)(a+h_2)}, \ldots, \quad \frac{x(x+h_1)(x+h_2)\ldots(x+h_n)}{(a+h_1)(a+h_2)\ldots(a+h_{n+1})}, \ldots$$

Se cer:

1^o Suma acestei serii, ştiind că aceasta este independentă de valorile pozitive şi crescătoare $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$;

2^o Modul de construcţie al acestei serii.

S-a presupus $x < a$.

Conform ipotezei, suma seriei rămâne constantă când $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ sunt înlocuite cu zero.

Deci această sumă este $\frac{a}{a-x}$. Rezultă că avem:

$$1 = \frac{a-x}{a} + \frac{x}{a}\frac{a-x}{a+h_1} + \frac{x}{a}\frac{x+h_1}{a+h_1}\frac{a-x}{a+h_2} + \frac{x}{a}\frac{x+h_1}{a+h_1}\frac{x+h_2}{a+h_2}\frac{a-x}{a+h_2} + \cdots$$

Dar:

$$\frac{a-x}{a+h_1} = 1 - \frac{x+h_1}{a+h_1}, \qquad \frac{a-x}{a+h_2} = 1 - \frac{x+h_2}{a+h_2}, \ldots$$

Dacă vom nota:

$$\frac{x+h_p}{a+h_p} = \alpha_p$$

rezultă:

$$1 = \frac{a-x}{a} + \frac{x}{a}\left[1 - \alpha_1 + \alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_3) + \cdots\right]$$

Aşadar seria este transformarea identităţii:

$$1 = 1 - \alpha_1 + \alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_3) + \cdots,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ reprezintă fracţii oarecare.

CUPRINS

Calcul diferenţial

Limita unei funcţii

■ **2.1..** (*Definiţia lui **Cauchy***). Fie o funcţie $f: A \to \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$ şi un punct $x_0 \in A'[\mathbb{R}]$. Spunem că *f are limita în x_0 egală cu l* şi vom scrie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ dacă:

pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca $|f(x) - l| < \varepsilon$, $\forall\, x \in A, x \neq x_0$ şi $|x - x_0| < \delta$.

(*Teorema lui **Heine***). Funcţia $f: A \to \mathbb{R}$ are limită în $a \in A$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n), x_n \in A, x_n \neq x_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, şirul $\big(f(x_n)\big)$ este convergent.

Presupunem că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ şi să considerăm un şir (x_n) de numere reale cu proprietăţile: $x_n \in A, x_n \neq a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Pentru $\delta > 0$ există $N = N(\delta)$ astfel încât $|x_n - a| < \delta$, $\forall\, n > N$. De aici rezultă $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru $n > N$, deci şirul $\big(f(x_n)\big)$ converge la l.
Presupunem acum că pentru orice şir de numere reale (x_n) cu următoarele proprietăţi: $x_n \in A$, $x_n \neq a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, şirul $\big(f(x_n)\big)$ converge. Vom arăta la început că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nu depinde de (x_n). Presupunem că există două şiruri reale (x_n') şi (x_n'') cu următoarele proprietăţi:

$$x_n', x_n'' \in A,\ x_n' \neq a, x_n'' \neq a,\ \lim_{n\to\infty} x_n{}' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = a \text{ şi } \lim_{n\to\infty} f(x_n{}') = l' \neq l'' = \lim_{n\to\infty} f(x_n'').$$

Cu şirurile $(x_n{}'), (x_n{}'')$ construim şirul (x_n) definit astfel: $x_n = \begin{cases} x_k' & \text{pentru} \quad n = 2k \\ x_{k+1}'' & \text{pentru} \quad n = 2k+1 \end{cases}$

şi remarcăm că acest şir are proprietăţile: $x_n \in A$, $x_n \neq a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Prin urmare şirul $\big(f(x_n)\big)$ converge către un număr l. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n{}') = l'$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = l''$, trebuie să avem $l = l'$ şi $l'' = l$ şi astfel avem $l' = l''$, ceea ce este absurd.Fie l valoarea comună tuturor şirurilor $\big(f(x_n)\big)$. Vom arăta că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. Presupunem contrariul şi anume că există un $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n \in A$, $x_n \neq a$ astfel încât $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ şi $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$. Rezultă de aici că şirul $\big(f(x_n)\big)$ nu converge la l deşi $x_n \in A$, $x_n \neq a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ceea ce este absurd.

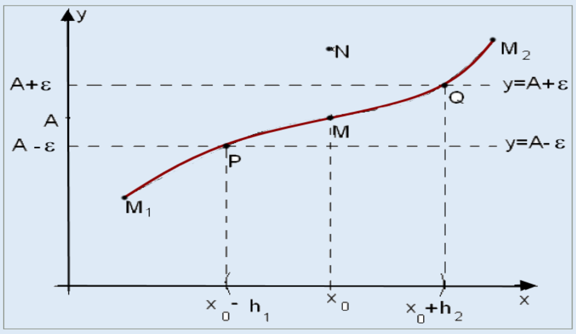
Observaţii.

1^o În general, valoarea lui δ depinde de ε, adică $\delta = \delta(\varepsilon)$.

2^o Cantitatea ε ne spune cât de aproape vrem să fie $f(x)$ de limita l, iar cantitatea δ precizează cât de aproape de x_0 trebuie să îl alegem pe x ca să obţinem acest lucru.

3^o Atunci când determinăm limita unei funcţii într-un punct x_0, nu ţinem cont de ce se întâmplă în punctul x_0. Mai mult, funcţia poate să nu fie definită în x_0. Deci două funcţii egale pe o vecinătate a lui x_0, cu o posibilă excepţe în x_0, unde acestea pot fi diferite sau chiar nedefinite, au aceeaşi limită pentru $x \to x_0$ sau nu au limită.
Numărul limită l furnizează informaţii despre comportarea funcţiei într-o vecinătate a punctului x_0.

4^0 *Interpretare geometrică*.



Fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar, oricât de mic şi fixăm punctele $A-\varepsilon$, $A+\varepsilon$ pe axa Oy. Fie P, Q punctele de intersecţie ale graficului $f(x)$ cu dreptele $y = A-\varepsilon$ şi $y = A+\varepsilon$ şi fie $x_0 - h_1$ şi $x_0 + h_2$ $(h_1 > 0, h_2 > 0)$ abscisele punctelor P, Q.
Pentru orice $x \neq x_0$ din intervalul $(x_0 - h_1,\ x_0 + h_2)$ valoarea funcţiei $f(x)$ se află între $A-\varepsilon$, $A+\varepsilon$, adică:

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon .$$

Fie $\delta = \min\{h_1, h_2\}$. Atunci intervalul $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ este conţinut în $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$.
În concluzie, inegalitatea $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$, echivalentă cu $|f(x)A| < \varepsilon$, este garantată $\forall\, x,\ x \neq x_0$ din intervalul $(x_0-\delta$, $x_0+\delta)$ adică $\forall x$ care verifică condiţia $0 < |x - x_0| < \delta$.
Cu alte cuvinte, funcţia $y = f(x)$ are limita A în punctul x_0 dacă pentru orice bandă, oricât de îngustă, dintre dreptele $y = A-\varepsilon$ şi $y = A+\varepsilon$, există $\delta > 0$ astfel încât graficul lui $y = f(x)$ se află în bandă pentru orice $x \neq x_0$ din δ- vecinătatea lui x_0.

■ **2.1.**. (*Criteriul CAUCHY-BOLZANO pentru limita funcţiei*). Funcţia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limită în a dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât:

$0 < |x' - a| < \delta$ şi $0 < |x'' - a| < \delta$ implică $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

■ Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime, $x_0 \in A'[\overline{\mathbb{R}}]$ un punct şi $f: A \to \mathbb{R}$ o funcţie. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există şi este egală cu $l \in \overline{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow \forall\, U \in \mathcal{V}(l),\ \exists\, V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$.

1^o $(\Rightarrow)$ Presupunem contrariul, deci $\exists\, U \in \mathcal{V}(l)$ cu proprietatea:

$\forall\, V \in \mathcal{V}(x_0), \quad f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \nsubseteq U \quad (1)$

Construim un şir $(V_n)_{n\geq 1}$ de vecinătăţi ale lui x_0 astfel:

(i) $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right)$, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$;
(ii) $V_n = (n, \infty]$, dacă $x_0 = +\infty$;
(iii) $V_n = [-\infty, -n)$, dacă $x_0 = -\infty$.

Din (1) rezultă că:

$\forall\, n \geq 1,\ \exists\, x_n \in A \cap V \setminus \{x_0\}$ a.î. $f(x_n) \notin V \quad (2)$

Evident $\forall\, n \geq 1$ avem în cele trei cazuri:

(i) $|x - x_0| < \frac{1}{n}$;
(ii) $x_n > n$;
(iii) $x_n < -n$.

Aşadar $x_n \to x$, deci conform ipotezei $f(x_n) \to l$ şi deci pentru V de mai sus:

$\exists\, n_V \geq 1$ cu $f(x) \in V \ \ \forall\, n \geq n_V$, ceea ce contrazice (2).

2^o $(\Leftarrow)$ Presupunem că f satisface condiţia din enunţ şi fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu elemente din $A \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0$.
Fixăm $U \in \mathcal{V}(f(x_0))$; conform ipotezei, $\exists\, V \in \mathcal{V}(x_0)$ cu $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$.
Deoarece $x_n \to x_0,\ \exists\, n_V \geq 1$ a.î. $x_n \in V,\ \forall\, n \geq n_V$, deci $x_n \in A \cap V \setminus \{x_0\},\ \forall\, n \geq n_V$ şi deci $f(x_n) \in U,\ \forall\, n \geq n_V$, prin urmare $f(x_n) \to l$.

■ Dacă funcţia $f: I \to \mathbb{R}$ are limită în punctul $x_0 \in I'$, atunci această limită este unică.

Presupunem că funcţia $f(x)$ în punctul x_0 are două limite diferite $L \neq L'$. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ şi $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Atunci şirul valorilor corespunzătoare ale funcţiei $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ar trebui să aibă două limite diferite L şi L', dar aceasta este imposibil, deoarece dacă un şir numeric are limită, atunci aceasta este unică.

Observaţie. Dacă putem contrui două şiruri de puncte $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x'_n \in I \setminus \{x_0\}, x''_n \in I \setminus \{x_0\}$ convergente la x_0 astfel încât şirurile corespunzătoare de valori ale funcţiei $\left(f(x'_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\left(f(x''_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au limite diferite sau în general nu au limită, atunci funcţia $f(x)$ nu are limită în punctul x_0.

Limita unei funcţii. Exerciţii

■ Se dă funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se demonstreze că $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

Se consideră un $\varepsilon > 0$. Se pune problema determinării unui $\delta(\varepsilon)$ astfel încât:

$$\forall\, x, \quad x \neq 1, \quad |x-1| < \delta \Rightarrow |x^2-1| < \varepsilon.$$

Avem: $|x^2-1| = |x-1| \cdot |x+1|$ deci pe măsură ce x se apropie de 1, factorul $|x-1|$ devine mic şi dacă factorul $|x+1|$ ar fi o constantă, atunci am putea determina pe δ prin împărţirea lui ε cu o constantă.

Printr-un truc putem înlocui factorul $|x+1|$ cu o constantă. Anume, totdeauna alegem pe δ astfel încât $\delta \leq 1$, în care caz vom avea:

$$|x-1| < \delta \leq 1 \text{ adică } |x-1| < 1,$$

iar $0 < x < 2$. Atunci:

$$|x^2-1| = |x-1| \cdot |x+1| < 3|x-1|.$$

Dacă vrem să fim siguri că $|x^2-1| < \varepsilon$, atunci acest calcul arată că ar trebui ca $3|x-1| < \varepsilon$, adică:

$$|x-1| < \frac{1}{3}\,\varepsilon.$$

Astfel ar trebui să alegem $\delta \leq \frac{1}{3}\,\varepsilon$. Dar trebuie şi $\delta \leq 1$. Dacă am considerat un ε pentru care $\frac{1}{3}\,\varepsilon > 1$, atunci alegem $\delta = 1$ în loc de $\delta = \frac{1}{3}\,\varepsilon$. În concluzie, vom alege:

$$\delta = \min\left(1, \frac{1}{3}\varepsilon\right).$$

Am arătat astfel că dacă alegem δ în acest mod, atunci $|x-1| < \delta$ garantează $|x^2-1| < \varepsilon$, pentru orice alegere a lui ε.

■ Să se calculeze următoarele limite:

1^o $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$; 2^o $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$; 3^o $\lim_{x\to 0} f(x)$, unde $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

1^o $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, $\forall\, x \neq 0$ şi nu este definită în $x = 0$.

Din definiţia funcţiei în punctul $x = 0$, punctul $x = 0$ este exclus.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

2^o $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$, $\forall\, x \neq 2$ şi nu este definită în $x = 2$.

Din definiţia funcţiei în punctul $x = 2$, punctul $x = 2$ este exclus.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

3^o Funcţia $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ este egală cu $f(x)$ peste tot, mai puţin în $x = 0$ şi $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ deci:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0\,.$$

■ Să se arate că funcţia $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$.

Fie $x_n' = \frac{1}{n\pi}$, $x_n' \to 0$, $f(x_n') = \sin n\pi = 0$ şi

$$x''_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \qquad x''_n \to 0, \qquad f(x''_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Se observă că $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(x''_n)$

Să se calculeze următoarele limite:

1^o $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$; 2^o $\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x^3+8}$; 3^o $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}$; 4^o $\lim_{x\to 27}\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-3}$;

5^o $\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{4}}-1}$; 6^o $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{3x}$; 7^o $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{\cos x-1}$; 8^o $\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x-3}{2-\sqrt{x^2+4}}$;

https://www.math.ucdavis.edu/~kouba/CalcOneDIRECTORY/limcondirectory/LimitConstant.html

1^o Se observă că atât numitorul cât şi numărătorul se anulează în $x = 3$, deci avem cazul "$\frac{0}{0}$". Avem:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(x-3)(2x+1)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x^2+9)}{(2x+1)} = \frac{(3+3)(3^2+9)}{2\cdot 3+1} = \frac{108}{7}.$$

S-a simplificat cu $x-3$, factorul care genera forma nedeterminată.

2^o Din nou avem cazul "$\frac{0}{0}$":

$$\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x^3+8} = \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{2x}\cdot\frac{1}{x^3+8} = \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{2x(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{1}{2x(x^2-2x+4)} = -\frac{1}{48}.$$

S-a simplificat cu $x+2$, factorul care genera forma nedeterminată.

3^o În mod similar trebuie evitată nedeterminarea de tip "$\frac{0}{0}$":

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}\cdot\frac{3+\sqrt{x+5}}{3+\sqrt{x+5}} = \lim_{x\to 4}\frac{9-(x+5)}{(x-4)\left(3+\sqrt{x+5}\right)} = \lim_{x\to 4}\frac{-1}{3+\sqrt{x+5}} = -\frac{1}{6}.$$

Pentru a se elimina nedeterminarea, s-a amplificat cu conjugata expresiei $3-\sqrt{x+5}$ şi anume cu $3+\sqrt{x+5}$.

4^o Din nou nedeterminare de tip "$\frac{0}{0}$":

$$\lim_{x\to 27}\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-3} = \lim_{x\to 27}\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+3x^{\frac{1}{3}}+9\right)}{x^{\frac{1}{3}}-3} = \lim_{x\to 27}\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2+3\cdot 27^{\frac{1}{3}}+9 = 27.$$

5^o Din nou avem cazul "$\frac{0}{0}$":

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{4}}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{4}}-1}\cdot\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+x^{\frac{1}{3}}+1}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+x^{\frac{1}{3}}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)}{\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)}{\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)} =$$

$$= \frac{\left(1^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(1^{\frac{1}{2}}+1\right)}{\left(1^{\frac{2}{3}}+1^{\frac{1}{3}}+1\right)} = \frac{4}{3}.$$

6^o Din nou avem cazul "$\frac{0}{0}$", dar se aplică limita: $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{5x}{3x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

7^o Se va ţine cont că: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-1-1}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x-1)(\cos x+1)}{\cos x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x+1)}{1} = \frac{2(1+1)}{1} = 4.$$

8^o Se observă că numărătorul tinde către -3, iar numitorul la stânga către zero.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x-3}{2-\sqrt{x^2+4}} = \frac{-3}{0^-} = +\infty.$$

9^o

Continuitate

■ Se spune că funcţia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *continuă* în punctul $x_0 \in A$ dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de termeni din A , pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Dacă o funcţie care nu este continuă într-un punct x_0, vom spune că este *discontinuă* în x_0.
Vom spune că o funcţie este continuă pe o mulţime (inclusă în domeniul de definiţie) dacă este continuă în fiecare punct al acesteia.

Fie o funcţie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi un punct $x_0 \in A$. Atunci următoarele propoziţii sunt echivalente:
1^0 f este continuă în x_0;
2^o $\forall\, U \in \mathcal{V}\big(f(x_0)\big),\ \exists\, V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V) \subseteq U$;
3^o $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0$ a.î. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in A,\ |x - x_0| < \eta$.

(i) x_0 *punct izolat*. Atunci condiţiile $1^o - 3^o$ sunt întotdeauna îndeplinite independent una de alta.

■ → Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime, $x_0 \in A$ un punct şi $f, g: A \to \mathbb{R}$ două funcţii continue în x_0.
Atunci funcţiile $f \pm g,\ \lambda f,\ fg, {}^{f}\!/_{g}$ (dacă $g(x) \neq 0,\ \forall\, x \in A$), $|f|, \max\{f,g\}, \min\{f,g\}$ şi f^g (dacă f^g are sens), sunt continue în x_0.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu elemente din A, $x_n \to x_0$. Atunci conform **2.3.15**,

---

■ (*Compunerea a două funcţii continue*). Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ două mulţimi şi $f: A \to B,\ g: B \to \mathbb{R}$ două funcţii continue.
Dacă f este continuă în $x_0 \in A$ şi g este continuă în $y_0 \coloneqq f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este continuă în x_0.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu elemente din A, care are limita x_0. Atunci f fiind continuă în x_0, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, deci g fiind continuă în y_0, avem:
$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g\big(f(x_n)\big) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0).$$
Prin urmare, $g \circ f$ este continuă în x_0.

■

■ 1^o Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime şi $f: A \to \mathbb{R}_+^*,\ g: A \to \mathbb{R}$ două funcţii continue în $x_0 \in A$.
Atunci funcţia f^g este continuă în x_0.
2^o $\forall\, a \in \mathbb{R}$, funcţia $f(x) = x^a,\ x \in \mathbb{R}_+^*$ este continuă;
3^o $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

1^o Fie $h := f^g$ i.e. $h(x) = f(x)^{g(x)}$, $\forall\, x \in A$. Evident avem $h = e^{g \ln f}$. Deoarece f este continuă în x_0 şi ln este continuă în x_0, conform proprietăţii de compunere a funcţiilor continue, $\ln f$ este continuă în x_0, deci (ex. *****) $g \ln f$ este continuă în x_0. Cum e^t este continuă (pe $\mathbb{R}$), deducem că h este continuă în x_0.

2^o Rezultă din punctul anterior.

3^o Dacă $x = 0$, afirmaţia este evidentă. Fie $x \neq 0$ fixaţi; atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}}\right]^x = e^x .$$

■ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ are loc relaţia:

$$e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă (conform criteriului raportului **D'Alembert**), deci este convergentă; fie $f(x)$ suma sa. Atunci conform teoremei lui **Mertens**, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$f(x)f(y) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\,(x+y)^n = f(x+y).$$

Dacă $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$, rezultă:

$$|f(x) - f(0)| = \left|x \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(n+1)!}\right| \leq |x| \cdot \sum_{n\geq 1}\frac{|x|^n}{n!} = |x| \cdot e ,$$

de unde rezultă că f este continuă în 0. Atunci din relaţia:

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0)\,(f(x - x_0) - 1)\,, \qquad \forall\, x, x_0 \in \mathbb{R}$$

rezultă că f este continuă în x_0, deci pe $\mathbb{R}$.

Se aplică exerciţiul **anterior**, punctul 2^o, de unde conchidem că $f(x) = c^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, cu $c > 0$ fixat. Deoarece $c = f(1) = e$, obţinem $f(x) = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Derivată

O funcţie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *derivabilă* (*diferenţiabilă*) în punctul $x_0 \in A$ dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ şi este finită. Valoarea limitei se notează cu $f'(x_0)$ sau cu $\frac{df}{dx}(x_0)$ şi se numeşte *derivata lui* f *în* x_0.

Dacă funcţia : $A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă (diferenţiabilă în orice punct $a \in A$ atunci funcţia $f': A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se numeşte *derivata* funcţiei f.

Funcţia $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ este derivabilă (diferenţiabilă) în orice punct $c \in \mathbb{R}$.

Pentru c fixat, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ (pentru $x \neq c$) în cazul de faţă este:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{x^2-c^2}{x-c} = \frac{(x-c)(x+c)}{x-c} = x + c \xrightarrow[x \to c]{} 2c.$$

Deci f este derivabilă în punctul c şi $f'(c) = 2c$.

Funcţia $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ este derivabilă în orice punct $c \neq 0$.

Este uşor de verificat că f este diferenţiabilă în orice $c \neq 0$ şi $f'(c) = 1$ pentru $c > 0$ şi $f'(c) = -1$ pentru $c < 0$.

Pentru $c = 0$ avem: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x > 0 \\ -1 \text{ pentru } x < 0 \end{cases}$

De aici: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x \to o^+]{} 1$ şi $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x \to o^-]{} -1$

Deoarece aceste limite laterle nu coincid, f nu este derivabilă în $c = 0$.

Observaţie. În general, punctele în care f nu este derivabilă pot fi identificate adesea examinând limitele laterale ale raportului $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dacă $c \to x_0$.

Limita la stânga $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se numeşte *derivata la stânga* a funcţiei f în x_0 şi se notează $f'_-(x_0)$.

Analog, limita la dreapta $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se numeşte *derivata la dreapta* a funcţiei f în x_0 şi se notează $f'_+(x_0)$.

Evident, $f'(x_0)$ există dacă şi numai dacă $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Dacă funcţia f este derivabilă (diferenţiabilă) în punctul a, atunci f este continuă în a.

Definim funcţia:

$$F_a(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{dacă } x \neq a \\ f'(a), & \text{dacă } x = a \end{cases}$$

Deoarece f este derivabilă în a, $F_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} F_a(a)$ şi deci F_a este funcţie continuă în a. Deoarece

$$f(x) = f(a) + F_a(x) \cdot (x-a), \quad \forall\ x \in A$$

rezultă că funcţia f este continuă în a.

Observaţie. Există funcţii continue care nu sunt diferenţiabile. De exemplu funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ şi $f(0) = 0$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi nederivabilă în 0.

■ 1^o $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;
2^o $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
3^o $(a^x)' = a^x \ln a$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$;
4^o $(\mathbb{e}^x)' = \mathbb{e}^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
5^o $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
6^o $(x^a)' = ax^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$ $(a \in \mathbb{R})$;

1^o Fie $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ cu n fixat. Atunci avem:

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}h + C_n^2 x^{n-2}h^2 + \cdots + C_n^n h^n,$$

deci:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}h + \cdots + C_n^n h^{n-1} = C_n^1 x^{n-1}.$$

2^o $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci avem:

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Deoarece $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ şi cos este continuă, rezultă:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

3^o Fie $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci avem:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x\,\frac{a^h - 1}{h}, \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^*.$$

Punem $a^h - 1 = t$. Funcţia exp a fiind omeomorfă, rezultă $t \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$.

Deoarece $h = \frac{\ln(1+t)}{na}$, avem:

$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{t\ln a}{\ln(1+t)} = \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}},$$

deci
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}} = a^x\ln a.$$

4^o Se aplică punctul precedent pentru $a = 1$.

Se poate da şi o demonstraţie directă: Fie $f(x) = \mathbb{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\mathbb{e}^{x+h} - \mathbb{e}^x}{h} = \mathbb{e}^x\cdot\frac{\mathbb{e}^h - 1}{h}, \qquad \forall\, x, h \in \mathbb{R}, \qquad h \neq 0 \qquad (1)$$

5^o

6^o

■ Spunem că o funcţie $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I-interval deschis) este de două ori derivabilă în punctul $a \in I$ dacă f este derivabilă pe o vecinătate a lui a şi derivata f' este derivabilă în a.
Notăm $f''(a) = (f')'(a)$ şi o numim derivata a doua (derivata de ordinul II) a lui f în a.
Recurent, derivata de ordinul n a lui f în punctul a este:

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a) \text{ pentru } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

(*Formula lui* ***Taylor***) Fie $f: I_{interval\ deschis} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $(n+1)$ pe I şi fie un punct $a \in I$. Atunci pentru orice $x \in I$ există un c între x şi a astfel încât:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}_{restul\ \text{LAGRANGE}\ de\ ordin\ n}.$$

În particular, pentru $a = 0$, găsim formula lui **MacLaurin**:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}, \qquad \text{unde } \theta \in (0,1).$$

Observaţie. Aceste formule sunt utilizate pentru aproximarea funcţiilor, pentru determinarea punctelor de extrem sau pentru calculul limitelor de funcţii.

Derivată. Exerciţii

■ Să se determine cel mai mic număr real pozitiv x pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x}$ este descrescător.

Considerăm funcţia $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = (t+x)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$, $t \geq 1$.
Evident $a_n = e^{f(n)}$, $n \geq 1$. Avem:

$$f'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{t+x}{t(1+t)}, \qquad f''(t) = \frac{t(2x-1)+x}{t^2(1+t)^2}.$$

Dacă $x \geq \frac{1}{2}$ rezultă $f''(t) \geq 0$ pentru orice $t \geq 1$, deci f' este strict descrescătoare pe $[1,\infty)$. Cum $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$, rezultă:

$$f'(t) < 0, \qquad t \geq 1,$$

deci f este crescătoare pe $[1,\infty\,)$. Rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător pentru $x \geq \frac{1}{2}$. Dacă $x < \frac{1}{2}$, atunci ecuaţia $f''(t) = 0$ are rădăcina $t_0 = \frac{x}{1-2x}$ şi $f''(t) \leq 0$ pentru $t \geq t_0$. Rezultă că f' este descrescătoare pe $[t_0,\infty)$ şi cum $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$ avem $f'(t) > 0$ pentru $t \geq t_0$. Prin urmare şirul (a_n) este crescător pentru $n > n_0$. Cel mai mic număr pentru care $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător este $x = \frac{1}{2}$.

■ Să se utilizeze formula lui **MacLaurin** pentru determinarea formulelor:

1^o $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}$, unde $\theta \in (0,1), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2^o $\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}x^6 \sin(\theta x)$, unde $\theta \in (0,1)$.

3^o $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \cos(\theta x)$, unde $\theta \in (0,1)$.

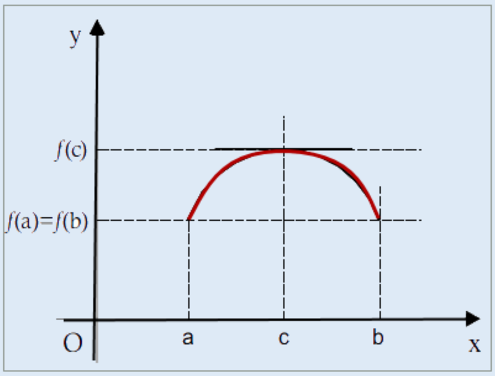
Vezi şi Ecuaţii funcţionale , Ecuaţii transcendente , Exemple şi contraexemple , Proprietatea lui Darboux

Teoreme de medie

■ (*Teorema lui* ***Rolle***). Fie o funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ \ a,b\in\mathbb{R}, a<b$. Dacă:
- f este continuă pe intervalul deschis $[a,b]$;
- f este derivabilă pe intervalul deschis (a,b);
- f are valori egale la capetele intervalului: $f(a)=f(b)$,

atunci există cel puţin un punct $c\in(a,b)$ în care derivata se anulează: $f'(c)=0$.

Interpretare geometrică. Din $f'(c)=0$ rezultă că tangenta la graficul funcţiei f în punctul $(c,f(c))$ este paralelă cu axa Ox. Deci, dacă toate cerinţele teoremei lui **Rolle** sunt îndeplinite, atunci, pe graficul funcţiei f există cel puţin un punct $(c,f(c))$ în care tangenta este paralelă cu axa Ox.



■ (*Teorema lui* ***Lagrange***). Fie o funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ \ a,b\in\mathbb{R}, a<b$. Dacă:
- f este continuă pe intervalul deschis $[a,b]$;
- f este derivabilă pe intervalul deschis (a,b);

atunci există cel puţin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ (*formula lui* ***Lagrange***).

Observaţii.

1^o Teorema lui **Lagrange** (numită şi *prima teoremă de medie*) este o generalizare a teoremei lui **Rolle**.

2^o Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b). Se pune problema prin ce se mai caracterizează punctul intermediar c, $c\in(a,b)$?

Considerăm punctele $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$, $C(x,f(x))$. Aria triunghiului determinat de cele trei puncte este:

$$A_{\Delta\mathrm{ABC}}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\\ x & f(x) & 1\end{vmatrix}\right\|.$$

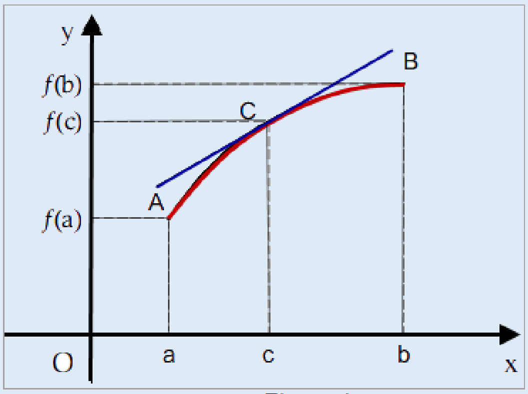
Prin derivare, se obţine:

$$A'_{\Delta\mathrm{ABC}}=\left\|\begin{vmatrix} a' & f'(a) & 1'\\ b & f(b) & 1\\ x & f(x) & 1\end{vmatrix}\right\|+\left\|\begin{vmatrix} a & f(a) & 1\\ b' & f'(b) & 1'\\ x & f(x) & 1\end{vmatrix}\right\|+\left\|\begin{vmatrix} a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\\ x' & f'(x) & 0\end{vmatrix}\right\|.$$

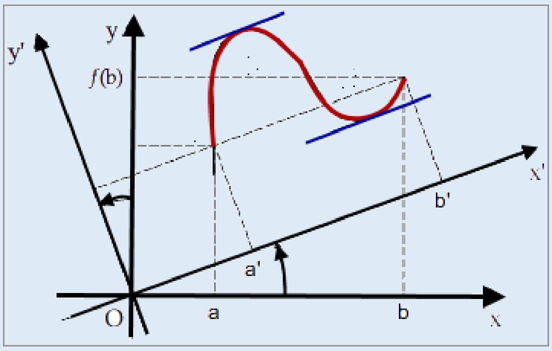
Punând condiţia $A'(x) = 0$ pentru puncte critice, iar punctul $C(x, f(x))$ este punct de extrem. Cum primii determinanţi sunt nuli (au câte o linie nulă), rezultă că şi ultimul determinant este nul. Efectuând calculele se obţine chiar relaţia lui **LAGRANGE**.

Interpretare geometrică:

1^o Formula lui **LAGRANGE** exprimă faptul că există pe graficul funcţiei f cel puţin un punct $C(c, f(c))$, $c \in (a, b)$, în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu coarda (AB), adică panta tangentei în acel punct să fie egală cu panta coardei determinată de punctele $\left(A(a, f(a))\right), B(b, f(b))$.



2^o Teorema lui **LAGRANGE** nu este altceva decât teorema lui **ROLLE** după o rotaţie cu un unghi egal cu cel format de coardă cu axa Ox:



Interpretare fizică. Presupunem că x este timpul şi $f(x)$ este coordonata unui punct care se mişcă pe o dreaptă la momentul x. Expresia $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ reprezintă viteza medie a mişcării punctului în intervalul de timp de la a la b. Formula lui **LAGRANGE** arată că există un punct $x = c$ în care viteza instantanee este egală cu viteza medie în intervalul de timp $[a, b]$.

■ (*Teorema lui **CAUCHY***). Fie $f, g: [a, b] \to \mathbb{R},\ a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietăţile:

- f, g continue pe $[a, b]$;
- f, g derivabile pe (a, b);
- $g'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in (a, b)$.

Atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât să avem:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ (*formula lui **CAUCHY***).

Observaţie. Teorema lui **CAUCHY** mai este numită şi *a doua teoremă a creşterilor finite.*

■ (*Teorema lui **POMPEIU***). Fie o funcţie $f: [a, b] \to \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R},\ f(x) > 0,\ \forall\, x \in [a, b]$ şi care verifică ipotezele din teorema lui **LAGRANGE**. Atunci există cel puţin un $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Aplicând funcţiei $F(x) = \ln f(x)$ prima teoremă a creşterilor finite (**LAGRANGE**), obţinem:

$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$, unde $c \in (a, b)$,

$\ln f(b) - \ln f(a) = [\ln f(c)]'(b - a)$ de unde rezultă relaţia de demonstrat.

■ (*Consecinţe ale teoremei creşterilor finite*)

1^o (Funcţii cu derivata nulă). dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci aceasta este continuă pe acel interval.

2^o (Funcţii cu derivate egale). Dacă două funcţii derivabile au derivate egale pe un interval, atunci acestea diferă printr-o constantă pe acel interval.

3^o (Intervale de monotonie). Fie $f: E \to \mathbb{R}$, E —un interval, o funcţie derivabilă pe E.

- Dacă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in E$, atunci f este crescătoare pe E.
- Dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in E$, atunci f este descrescătoare pe E.
- Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in E$, atunci f este strict crescătoare pe E.
- Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in E$, atunci f este strict descrescătoare pe E.

■ Fie $f: E \to \mathbb{R}$, E —un interval şi $x_0 \in E$. Dacă:

- f este continuă în x_0;
- f este derivabilă pe $E \setminus \{x_0\}$;
- există $\lim\limits_{x \to \setminus x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$.

Teoreme de medie. Exerciţii

■ Să se calculeze limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\cdot\sqrt[n+1]{n+1}-n\cdot\sqrt[n]{n}\right].$$

Considerăm funcţia $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$, căreia îi aplicăm teorema lui **Lagrange**.
Rezultă că există $c_n\in(n,n+1)$ astfel ca:

$$f(n+1)-f(n)=c_n^{\frac{1}{c_n}}\left(\frac{1}{c_n}+1-\frac{\ln c_n}{c_n}\right).$$

Din $c_n>n$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ şi în continuare:

$$\lim_{n\to\infty}[f(n+1)-f(n)]=1.$$

■ Dacă a,b sunt două numere reale pozitive, $a<b$, atunci are loc inegalitatea:

$$e^{\frac{b-a}{b}}<\frac{b}{a}.$$

Se consideră funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Conform teoremei lui **Pompeiu**,

$$\frac{b}{a}=e^{\frac{b-a}{c}}\text{, unde } a<c<b.$$

Cum însă: $\frac{1}{a}>\frac{1}{c}>\frac{1}{b}$, adică $\frac{1}{c}\in\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$, rezultă:

$$\frac{b}{a}=e^{\frac{b-a}{c}}>e^{\frac{b-a}{b}}.$$

■ Folosind teorema lui **Lagrange**, să se determine eroarea care se realizează dacă se înlocuieşte $\sqrt{145}$ prin 12.

Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, $\forall\, x>0$, $a=144, b=145$.
Aplicând funcţiei f teorema lui **Lagrange** pe intervalul $[144,145]$, rezultă că există $\theta\in(0,1)$ astfel încât:

$f(a+1)-f(a)=1\cdot f'(a+\theta)$, adică: $\sqrt{145}-\sqrt{144}=\frac{1}{2\sqrt{144+\theta}}$, cu $\theta\in(0,1)$.

Deoarece: $\frac{1}{\sqrt{144+\theta}}<\frac{1}{\sqrt{144}}=\frac{1}{12}$, rezultă că: $12<\sqrt{145}<12+\frac{1}{24}$.

Cum $\frac{1}{24}<0{,}05$ avem: $12<\sqrt{145}<12{,}05$, deci eroarea comisă este mai mică decât $\frac{1}{24}$.

■ Să se calculeze valoarea aproximativă a lui $\cos 61^\circ$.

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ verifică condiţiile din teorema lui **Lagrange**.
Luăm $a=60^\circ=\frac{\pi}{3}$ şi $h=1^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}$. Aplicând lui f formula creşterilor finite, obţinem:

$$\cos 61^\circ-\cos 60^\circ=1\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\sin(60^\circ+\theta)\text{, cu } 0<\theta<1. \qquad (1)$$

Deoarece $\sin(60^\circ+\theta)>\sin 60^\circ$, rezultă că:

$-\sin(60^\circ+\theta)<\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi deci

$$\cos 61^\circ-\cos 60^\circ<-\frac{\pi\sqrt{3}}{360^\circ}\text{ sau }\cos 61^\circ<\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{360^\circ}. \qquad (2)$$

Am obţinut astfel un majorant al lui $\cos 61°$. Să găsim acum un minorant al lui $\cos 61°$. Pentru aceasta va fi suficient să găsim un majorant al lui $\sin(60° + \theta)$. În acest scop se aplică don nou teorema creşterilor finite funcţiei $\sin(60° + \theta)$ şi obţinem:

$\sin(60° + \theta) - \sin 60° = \theta \frac{\pi}{180°} \cos(60° + \theta_1\theta)$, cu $0 < \theta_1 < 1$.

Deoarece $0 < \theta < 1$ şi $\cos(60° + \theta_1\theta) < \cos 60° = \frac{1}{2}$ rezultă:

$\sin(60° + \theta) - \sin 60° < \frac{\pi}{360°}$ şi deci

$\sin(60° + \theta) < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360°}$.

Ţinând seama de (1), obţinem:

$$\cos 61° - \cos 60° > -\frac{\pi}{180°}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360°}\right], \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) deducem:

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360°} - \frac{\pi^2}{180° \cdot 360°} < \cos 61° < \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360°}, \qquad (4)$$

Deoarece $0{,}0150 < \frac{\pi\sqrt{3}}{360°} < 0{,}0151$ şi $\frac{\pi^2}{180° \cdot 360°} < \frac{1}{6480}$ (fiindcă $\pi^2 < 10$), obţinem:

$\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} < 0{,}4849$ şi $\frac{1}{6480} < \frac{2}{10000}$, de unde rezultă că:

$0{,}4847 < \cos 61° < 0{,}4849$, de unde rezultă:

$\cos 61° \approx 0{,}4848$ cu o eroare $\leq 0{,}00001$.

■ Să se arate că, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Considerăm funcţia $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Funcţia f este derivabilă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de unde rezultă că este continuă pe acel interval. Este suficient să arătăm că este derivabilă în $x = 0$. Aplicăm regula lui **L'Hospital** şi obţinem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Deci $f'(x) = 0$. Pentru orice $x \neq 0$ avem:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0,$$

deoarece $x < \tan x$, dacă $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Rezultă că f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ţinând seama că f este şi continuă, deducem că, pentru orice $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(0) > f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sau $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$.

■ Utilizând teorema lui **Lagrange**, să se arate care este eroarea pe care o facem înlocuind $\sqrt{101}$ prin 10.

Fie $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $a = 100$, $b = 101$.

Atunci $f(b) - f(a) = f'(a + \theta)$, $0 < \theta < 1$, adică $\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{100+\theta}}$.

Cum funcţia $t \to \frac{1}{2\sqrt{100+t}}$, $t \in [0, 1]$ este strict descrescătoare, avem:

$$\frac{1}{2\sqrt{101}} < \sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{100}}.$$

Eroarea realizată este mai mică decât:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{100}} - \frac{1}{2\sqrt{101}}\right) < \frac{1}{400}.$$

■ Aplicând formula lui **Lagrange** funcţiei $f(x) = \ln x$ pe intervalul $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că şirul cu termenul general:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este convergent şi are limita cuprinsă între 0 şi 1.

Pe intervalul $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}^*$, funcţia $f(x) = \ln x$ este continuă, iar pe intervalul $(k, k+1)$ este derivabilă. Deci în virtutea teoremei lui **Lagrange** există $c \in (k, k+1)$ astfel încât:

$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{c}$ sau $\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c}$, iar de aici:

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k} \text{ deoarece } k < c < k+1.$$

Punând aici $k = 1,2,\dots,n$, avem inegalităţile:

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < 1,$$
$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

care, adunate membru cu membru, dau:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \qquad (\mathbf{1})$$

de unde $\quad a_{n+1} \in \left(\frac{1}{n+1}, 1\right),\ \forall\, n \geq 1$.

Mai departe $\quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \ln\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} < 0$, deoarece:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e,$$

care este adevărată.

Prin urmare $a_{n+1} < a_n$, $\forall\, n \geq 1$, ceea ce arată că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Şirul fiind monoton şi negativ, cu termenii în intervalul $(0,1)$, din teorema lui **WEIERSTRASS** obţinem concluzia.

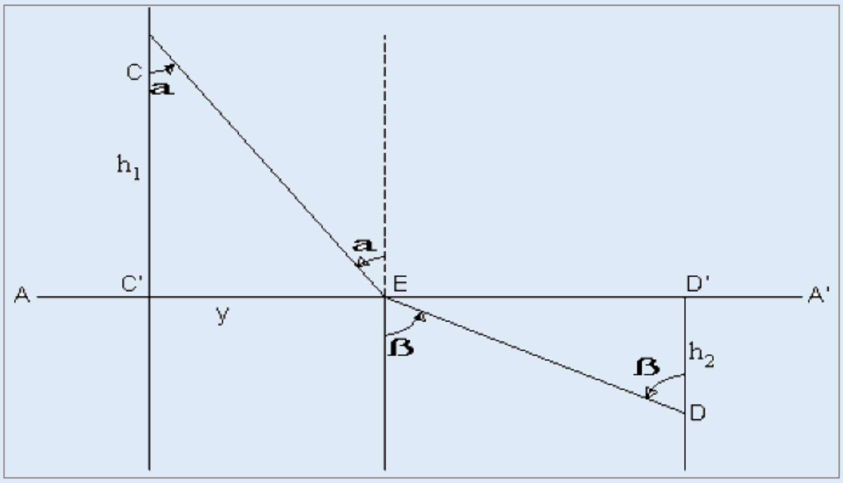
Acum să demonstrăm mărginirea şirului. Din prima inegalitate din (1) rezultă $a_{n+1} < 1$, iar din a doua inegalitate din (1) rezultă:

$$a_n > \ln(n+1) - \ln n > 0.$$

Deci $a \in (0,1)$, $\forall\, n$. Conform teoremei lui **WEIERSTRASS** şirul (a_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \in [0,1]$, unde $c \cong 0{,}577215\dots$ se numeşte *constanta lui **EULER*** şi este un număr iraţional.

■ (Consecinţă a teoremei lui **LAGRANGE** în rezolvarea problemelor de optică). După cum se ştie din fizică, principiul lui **FERMAT** afirmă că, pentru a ajunge dintr-un punct în altul, o rază de lumină se propagă după acea traiectorie pe care o parcurge într-un interval minim de timp.

Fie AA' suprafaţa de separaţie a două medii omogene în care lumina se propagă cu vitezele v_1 şi respectiv v_2. Să se determine traiectoria descrisă de o rază de lumină pentru a ajunge din punctul C în punctul D.



Fie C' şi D' proiecţiile lui C şi D pe AA', $c = C'D'$, $h_1 = CC'$, $h_2 = DD'$, $x = C'E$.

În fiecare din cele două medii omogene, lumina se propagă în linie dreaptă.

În primul mediu, lumina se propagă cu viteza v_1 şi parcurge distanţa CE în timpul t_1, $CE = v_1 t_1$ sau $t_1 = \frac{CE}{v_1}$.

În al doilea mediu, lumina se propagă cu viteza v_2 şi parcurge distanţa ED în timpul t_2, $ED = v_2 t_2$ sau $t_2 = \frac{ED}{v_2}$.

Timpul total este: $\quad t = \frac{CE}{v_1} + \frac{ED}{v_2}$.

Dar $\quad CE = \sqrt{h_1^2 + x^2}$ şi $ED = \sqrt{h_2^2 + (c-x)^2}$, deci:

$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (c - x)^2}}{v_2}.$$

Timpul t este o funcţie de x, $t(x)$, $0 \le x \le c$. Pentru a afla minimul acestei funcţii, anulăm derivata:

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (c - x)^2}} = 0.$$

Derivata se anulează pentru acele valori ale lui x pentru care:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (c - x)^2}}.$$

Derivata a doua:

$$T''(x) = \frac{h_1^2}{v_1\sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} - \frac{h_2^2}{v_2\sqrt{(h_2^2 + (c - x)^2)^3}}$$

este strict pozitivă pentru orice x, deci punctele de extrem ale lui $t(x)$ sunt puncte de minim.

Dar $\sin\alpha = \frac{x}{CE} = \frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}$ iar $\sin\beta = \frac{c-x}{DE} = \frac{c-x}{\sqrt{h_2^2+(c-x)^2}}$, astfel încât egalitatea care dă punctele de minim se scrie:

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}.$$

Notând cu v_0 viteza luminii în vid, indicii de refracţie n_1, n_2 ai celor două medii sunt:

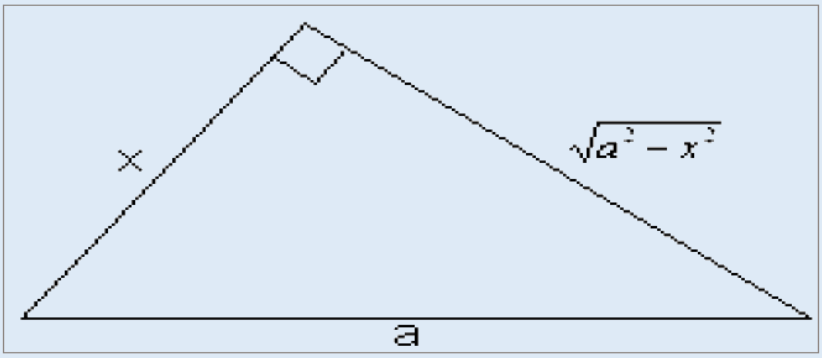
$$n_1 = \frac{v_0}{v_1}, \qquad n_2 = \frac{v_0}{v_2}.$$

Rezultă:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

care este *legea refracţiei*, cunoscută din fizică.

■ Să se determine maximul ariei triunghiurilor dreptunghice cu aceeaşi ipotenuză, de lungime a.



Dacă $a > 0$ este ipotenuza, atunci catetele sunt x şi $\sqrt{a^2 - x^2}$.
Aria unuia dintre triunghiurile considerate este:

$$S = \frac{1}{2}\, x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in (-a, a).$$

Am obţinut o funcţie $S: (-a, a) \to \mathbb{R}$, $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$, a cărei variaţie o studiem cu ajutorul derivatei. Avem:

$$S'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Punând condiţia $S'(x) = 0$, obţinem: $\quad x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Întocmim tabelul de variaţie de mai jos:

x	$-a$		$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		$+a$
$S'(x)$		$- - - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - - -$	
$S(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	$\frac{a^2}{4}$	$\searrow$	

de unde obţinem valoarea maximă:

$$S_{max} = S\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right),$$

adică:

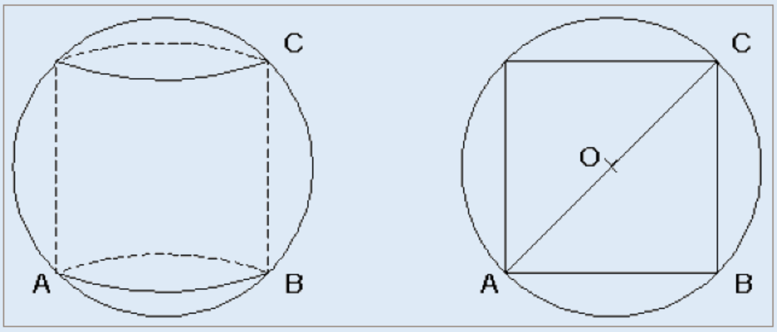
$$S_{max} = \frac{a^2}{4}.$$

Valoarea maximă a ariei se atinge pentru triunghiul dreptunghic isoscel.

■ Să se determine volumul maxim al cilindrilor înscrişi în sfera de rază r.

Dacă notăm $BC = 2x$ (înălţimea cilindrului), atunci raza bazei cilindrului este $\rho = \sqrt{r^2 - x^2}$. Cum volumul V al cilindrului de rază ρ şi înălţime h este $V = \pi\rho^2 h$, prin înlocuire găsim:

$$V = 2\pi x(r^2 - x^2).$$



Am obţinut o funcţie $V : [-r, r] \to \mathbb{R}$, $V(x) = 2\pi x(r^2 - x^2)$, a cărei variaţie o studiem cu ajutorul derivatei.

Avem: $V'(x) = 2\pi(r^2 - 3x^2)$ şi $V'(x) = 0$ implică $x = \pm\frac{r\sqrt{3}}{3}$.

Avem tabloul de variaţie:

x	$-r$		$-\frac{r\sqrt{3}}{3}$		$\frac{r\sqrt{3}}{3}$		$+r$
$V'(x)$		− − − − −	0	+ + + +	0	− − − − −	
$V(x)$		↘	m	↗	$\frac{4p\sqrt{3}\,r^s}{9}$	↘	

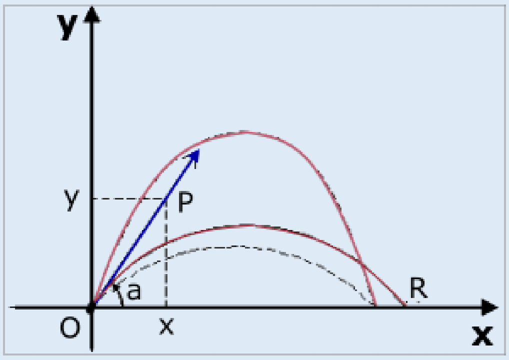
din care obţinem valoarea maximă:

$$V_{max} = V\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}\,r^3}{9}.$$

■ Să se determine sub ce unghi α faţă de orizontală trebuie lansat un proiectil cu viteza iniţială v_0, astfel încât să atingă distanţa maximă R.

Sub acţiunea gravitaţiei, corpul descrie o parabolă care taie orizontala în punctul R, dat de egalitatea:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$



Fie (x, y) coordonatele punctului de pe traiectorie în care corpul a ajuns după t secunde. Proiecţia vitezei pe orizontală este $v_0 \cos\alpha$, iar pe verticală $v_0 \sin\alpha$.

Proiecţia corpului pe orizontală are o mişcare uniformă de ecuaţie:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

iar mişcarea pe verticală este influenţată şi de acţiunea gravitaţiei:

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Eliminând t, se obţine ecuaţia traiectoriei:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, x - \frac{1}{2}\, g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} .$$

Punctele în care traiectoria atinge orizontala se obţin rezolvând ecuaţia:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, x - \frac{1}{2}\, g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0 .$$

Se determină R ca funcţie de $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $R(\alpha) = \frac{v_0}{g} \sin 2\alpha$.

Pentru a afla maximul acestei funcţii, calculăm derivata în raport cu argumentul α:

$$R'(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha$$

şi îi determinăm rădăcinile cuprinse între 0 şi $\frac{\pi}{2}$:

$\frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha = 0$ sau $\cos 2\alpha = 0$, deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Derivata a doua $R''(\alpha) = -\frac{4v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ este strict negativă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi deci şi în $\frac{\pi}{4}$.

Rezultă că $\frac{\pi}{4}$ este un maxim. Aşadar, pentru a realiza distanţa maximă, corpul trebuie aruncat sub un unghi de $45°$ faţă de orizontală.

O funcţie continuă dar nederivabilă în niciun punct a fost dată ca exemplu de **K. Weierstrass** (1872) sub forma unei serii de funcţii (detalii aici şi aici):

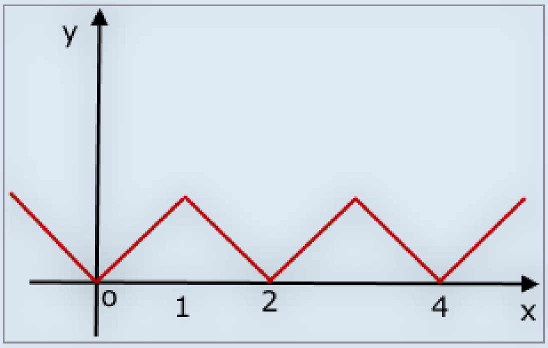
$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

cu $a \in (0,1)$ iar b întreg impar astfel încât $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Un alt exemplu a fost dat de **Takagi**, care a înlocuit cosinusoida cu o linie poligonală periodică.
Mai întâi se derfineşte pe intervalul $[0,2)$ funcţia *dinte*:

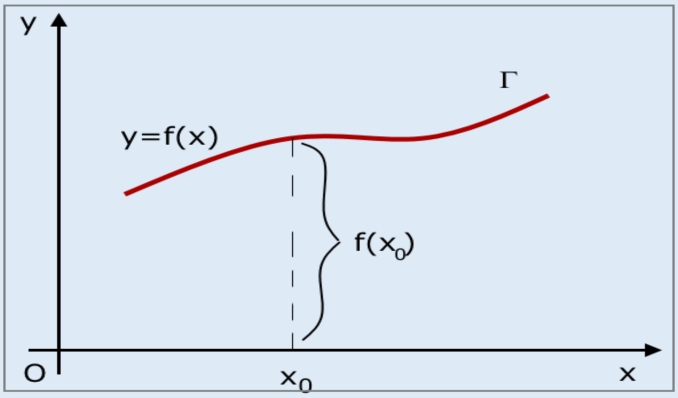
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \in [0,1) \\ 2-x, & \text{pentru } x \in [1,2), \end{cases}$$

care se prelungeşte prin periodicitate pe întreaga axă reală, astfel încât $f(x+2) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ şi obţinem funcţia "*lamă de fierăstrău*"



Aplicaţii ale derivatei

■ .. Se numeşte *curbă plană* (drum) o mulţime $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ cu proprietatea că există $\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $\varphi([\alpha, \beta]) = \Gamma$.
Funcţia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ constituie o *reprezentare carteziană* a lui Γ dacă G_f este graficul lui f.



Numim *curbă parametrică* sau *curbă parametrizată* în $\mathbb{R}^n$ a aplicaţie $\bar{r}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, unde:
1^o $I = (a, b)$ este un interval real deschis.
2^o $\bar{r}$ este o funcţie netedă adică pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ aplicaţia $x^i = \pi^i \circ \bar{r} : I \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de clasă $\mathcal{C}^\infty$ (netedă).
3^o Mulţimea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ o numim *curbă în* $\mathbb{R}^n$ dacă există o curbă parametrică $\bar{r} : I \to \mathbb{R}^n$ astfel încât $\mathcal{C} = \bar{r}(I)$.
Spunem că $\bar{r}$ este o *parametrizare* a lui $\mathcal{C}$ şi notăm:

$$\boxed{\mathcal{C}: \ \bar{r} = \bar{r}(t), \qquad t \in I} \qquad (1)$$

t se numeşte *parametru pe curba* $\mathcal{C}$, iar punctul $P = \bar{r}(t)$ al curbei îl notăm simplu $P(t)$ sau $P(\bar{r}(t))$.
Relaţia (1) o numim *ecuaţia parametrică a curbei* $\mathcal{C}$.

Observaţii.
1^o Este posibil ca intervalul I să nu fie deschis; atunci vom presupune existenţa perechii $(J, \bar{R})$ cu J interval real deschis conţinând I şi $\bar{R}: J \to \mathbb{R}^n$ netedă aşa încât $\bar{r}$ este restricţia la I a lui $\bar{R}$. Mai spunem că $\mathcal{C} = \bar{r}(I)$ este *arc al curbei* $\bar{\mathcal{C}} = \bar{R}(J)$.
Spre exemplu, domeniul de definiţie al *cercului unitate* $\mathcal{S}^1$ pentru o parametrizare injectivă nu este deschis:

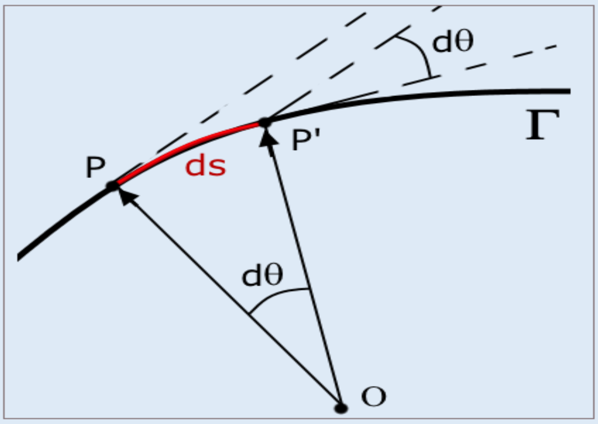
$$\mathcal{S}^1: \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, \ 2\pi)$$

şi bineînteles că avem $\bar{R}(t) = (\cos t, \sin t)$ neteă pe $J = \mathbb{R}$.
2^o Dacă $n = 2$ atunci spunem că $\mathcal{C}$ este o *curbă în plan* iar pentru $n = 3$ spunem că $\mathcal{C}$ este o *curbă în spaţiu*.
Dacă $\mathcal{C}$ este o curbă în spaţiu dar situată într-un plan Π atunci vom spune că $\mathcal{C}$ este o *curbă plană*.

■ Definim *cercul osculator* al curbei în punctul x_0 ca fiind cercul care coincide cu curba în vecinătatea punctului respectiv.

Raza acestuia se numeşte *rază de curbură*, iar inversa acesteia este denumită *curbură*.

1^o Fie o curbă Γ şi P un punct al acesteia. Atunci raza de curbură corespunzătoarea punctului ales este dată e derivata (dacă există) unghiului format de tangenta la curbă cu axa Ox în raport cu lungimea arcului de curbă cu originea în P: $r_P = \lim\limits_{s\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$.
2^o



Să se demonstreze că, în *coordonate polare*, curbura curbei $\mathcal{C}$: $\rho = \rho(\varphi)$ are formula:

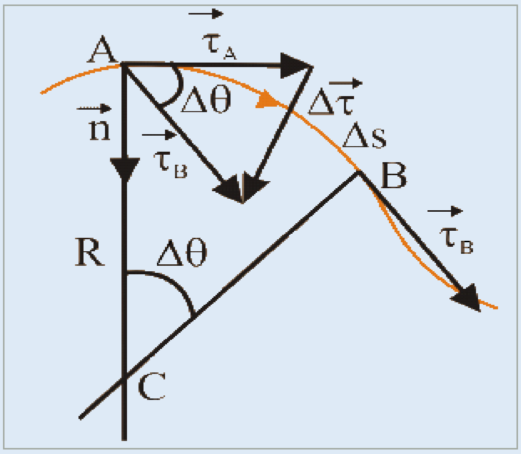
$$k(\varphi) = \frac{2\left(\rho'\right)^2 + \rho^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + (\rho')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se derivează relaţia: $\overline{r}'(\varphi) = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi,\ \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)$, de la lungimea curbei în coordonate polare şi se obţine:
$$\overline{r''}(\varphi) = (\rho''\cos\varphi - 2\rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi,\ \ \rho''\sin\varphi + 2\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi).$$

Normala la curbă care este orientată de-a lungul razei vectoare se numeşte normala principală şi se notează $\vec{n}$.
Se defineşte *binormala* ca fiind: $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

Să se demonstreze *formulele lui* ***Frenet***:

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{d\vec{\tau}}{d\vec{\theta}} = \vec{n} \qquad \frac{d\vec{\tau}}{d\vec{\theta}} = \frac{\vec{n}}{R}.$$



Avem:

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2|\vec{\tau}|\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx\ \Delta\theta\ \ (\text{în radiani}),$$

unde s-a ţinut cont că atunci când A tinde către B şi $\vec{\tau}_A \to \vec{\tau}_B = \vec{\tau}$, iar $|\vec{\tau}| = 1$.
În acest caz, $\Delta\vec{\tau}$ devine perpendicular pe $\vec{\tau}$.

Să se calculeze curbura *lemniscatei* în coordonate polare: $\mathcal{C}$: $\rho(\varphi) = R\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Se aplică formula anterioară: $k(\varphi) = \frac{3}{R}\sqrt{\cos 2\varphi}$.

■ (*Curbura graficelor*). Se dă curba grafic $\mathcal{C}:\ \bar{r}(t) = \big(t, f(t)\big),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Se cere curbura lui $\mathcal{C}$.

Avem $\overline{r''}(t) = \big(0,\ f''(t)\big)$, ceea ce dă:

$$k(t) = \frac{f''(t)}{(1+(f')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

şi deci $\mathcal{C}$ are ca puncte de inflexiune zerourile lui f''.

■ (*Curbura curbelor implicite*) Se dă curba definită implicit $\mathcal{C}:\ F(x,y) = 0$. Se cere curbura lui $\mathcal{C}$.

Vom parametriza curba ca în exerciţiul precedent $\mathcal{C}:\ :\ \bar{r}(t) = \big(t,\ f(t)\big)$; deci $F\big(t, f(t)\big) = 0$ şi derivând această relaţie obţinem: $F_x + F_y \cdot f' = 0$, ceea ce conduce la: $f' = -\frac{F_x}{F_y}$. Se derivează din nou:

$$f'' = -\frac{F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{F_y^3}$$

şi se înlocuieşte în formula anterioară:

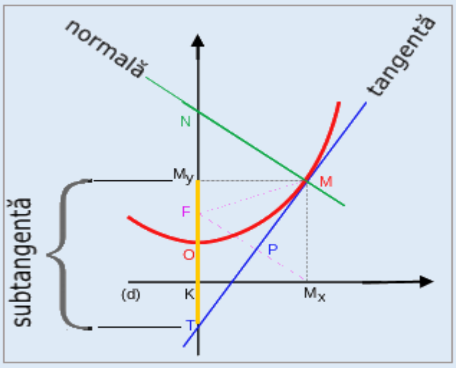
$$k(x,y) = -\frac{F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

sau încă: $k(x,y) = \frac{-\Delta}{\|\nabla F\|^3}$, unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}.$$

■ Se numeşte *subtangentă* a unei curbe segmentul determinat de proiecţia ortogonală pe axa absciselor a unui punct de pe curbă şi de intersecţia tangentei la curbă în acel punct cu axa absciselor.

Să se demonstreze că vârful unei parabole se află în mijlocul oricărei subtangente a acesteia.



Vezi şi [Culegere Algebră&Geometrie (Stoica&Neagu)](#)
[Geometria analitică (Udrişte)](#)

CUPRINS

Aplicaţii ale derivatei. Exerciţii

■ Să se determine cel mai mic număr real pozitiv x pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x}$ este descrescător.

Considerăm funcţia $f:[1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(t) = (t+x)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right),\ t \geq 1.$

Evident $a_n = e^{f(n)},\ n \geq 1$. Avem:

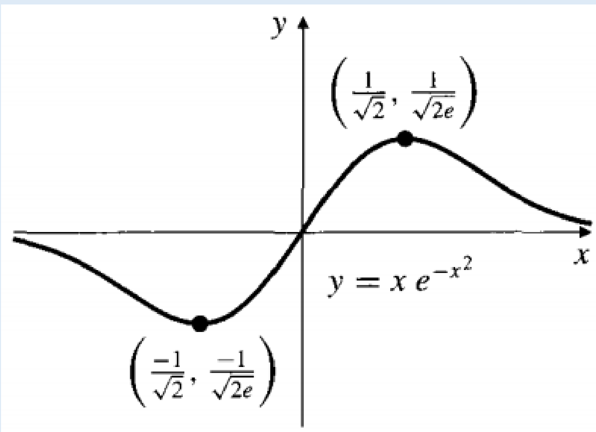
$$f'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{t+x}{t(1+x)}\,, \qquad f''(t) = \frac{t(2x-1)+x}{t^2(1+t)^2}\,.$$

Dacă $x \geq \frac{1}{2}$ rezultă $f''(t) \geq 0$ pentru orice $t \geq 1$, deci f' este strict crescătoare pe $[1,\infty)$.
Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f'(t) = 0$ rezultă $f'(t) < 0,\ t \geq 1$, deci f este descrescătoare pe $[1,\infty)$.
Rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător pentru $x \geq \frac{1}{2}$. Dacă $x < \frac{1}{2}$, atunci ecuaţia $f''(t) = 0$ are rădăcina $t_0 = \frac{x}{1-2x}$ şi $f''(t) \leq 0$ pentru $t \geq t_0$. Rezultă că f' este descrescătoare pe $[t_0,\infty)$ şi cum $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$ avem $f'(t) > 0$ pentru $t \geq t_0$. Prin urmare şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător pentru $n > t_0$. Cel mai mic număr pentru care $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător este $x = \frac{1}{2}$.

■ .. Trasarea graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ f(x) = x\cdot e^{-x^2}$.

Avem: $f'(x) = e^{-x^2}\cdot(1-2x^2)$, care se anulează doar pentru $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	
f'	−	0	+	0	−
f	↘	min	↗	max	↘



■ Se cere curbura următoarelor curbe:

1^o *Elipsa* E: $\bar{r}(t) = (a\cos t,\ b\sin t),\ t \in \mathbb{R}$ (sau $t \in [0, 2\pi]$) cu $a > 0, b > 0$.
2^o Ramura pozitivă a *hiperbolei* H: $\bar{r}(t) = (a\,ch\,t,\ b\,sh\,t),\ t \in \mathbb{R}$ cu $a > 0, b > 0$.
3^o Curba $\mathcal{C}$: $\bar{r}(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t),\ t \in \mathbb{R}$.
4^o *Cicloida*.
5^o *Astroida*.
6^o *Spirala logaritmică*.
7^o *Cardioida*: $\mathcal{C}$: $\bar{r}(t) = (2\cos t - \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t),\ t \in (0, 2\pi)$.

1^o $\overline{r'}(t) = (-a\cos t,\ b\cos t)$ şi $\overline{r''}(t) = (-a\,cost, -b\sin t) = -\bar{r}$. Rezultă:

$$k(t) = \frac{a}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Deci elipsa nu are puncte inflexionare. Deoarece:

$$k'(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2)\sin t\cos t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}$$

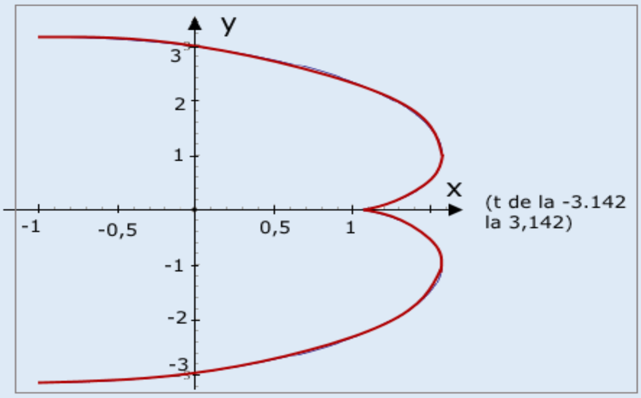
rezultă că elipsa are 4 vârfuri, exact intersecţiile cu axele: $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$.
2^o $\overline{r'}(t) = (a\,sh\,t, b\,ch\,t)$ şi $\overline{r''}(t) = (a\,ch\,t,\ b\,sh\,t) = \bar{r}(t)$. Rezultă:

$$k(t) = \frac{-ab}{(a^2\,sh^2\,t + b^2\,\mathrm{ch}^2\,t)^{\frac{3}{2}}}$$

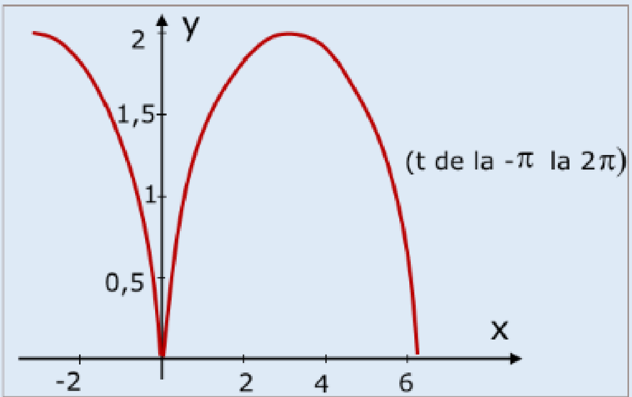
deci hiperbola nu are puncte de inflexiune. Deoarece:

$$k'(t) = \frac{-3ab(a^2 + b^2)\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t}{(a^2\,\mathrm{sh}^2\,t + b^2\,\mathrm{ch}^2\,t)^{\frac{5}{2}}}$$

rezultă că hiperbola are un singur vârf, intersecţia cu axa Ox: $t = 0$, unde se anulează funcţia sh. Reamintim că $ch\,t \geq 1$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
3^o $\bar{r}(t) = (t\cos t,\ t\sin t)$, $\overline{r''}(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)$ de unde rezultă $k(t) = \frac{1}{t}$.
Deci trebuie eliminat $t = 0$ din domeniul de definiţie, curba nu are puncte de inflexiune şi nici vârfuri.



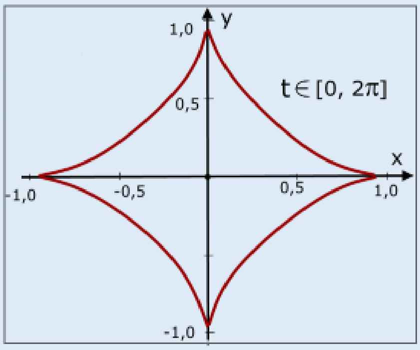
4^o $\overline{r''}(t) = R(\sin t, \cos t)$ şi deci $k(t) = \frac{-1}{4R\sin\frac{t}{2}}$, deci cicloida nu are puncte de inflexiune dar in domeniul de definiţie trebuie eliminate punctele: $t_k = 2k\pi$ cu $k \in \mathbb{Z}$. Cum $k'(t) = \frac{\cos\frac{t}{2}}{8r\sin^2\frac{t}{2}}$ rezultă că vârfurile cicloidei sunt: $t_k = (2k+1)\pi$ cu $k \in \mathbb{Z}$.



5^o $\overline{r''}(t) = 3R(2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t,\ 2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)$, $k(t) = \frac{-1}{3R\sin t\cos t}$

deci astroida nu are puncte de inflexiune dar din domeniul de definiţie trebuie eliminate punctele: $t_k = \frac{k\pi}{2}$ ci $k \in \mathbb{Z}$.

Scriind: $k(t) = \frac{-2}{3R\sin 2t}$, avem: $k'(t) = \frac{4\cos 2t}{3\,R\sin^2 2t}$ ceea ce spune că vârfurile astroidei sunt: $t_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ cu $k \in \mathbb{Z}$.

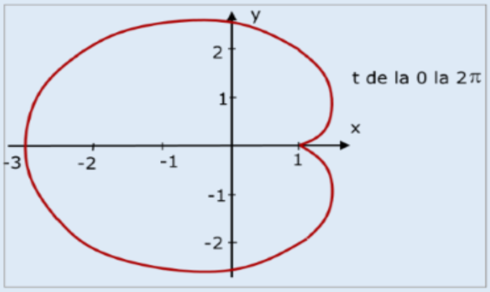


6^o $\overline{r''}(t) = R\mathrm{e}^{kt}(k^2\cos t - 2k\sin t + \cos t,\ \ k^2\sin t + 2k\cos t - \sin t\,)$ şi deci $k(t) = \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{R\sqrt{k+1}}$.

Sprala logaritmică nu are puncte de inflexiune şi nici vârfuri.

7^o $\overline{r'}(t) = 2(\sin 2t - \sin t, \cos t - \cos 2t)$, $\overline{r''}(t) = 2(2\cos 2t - \cos t,\ \ 2\sin 2t - \sin t)$.

$k(t) = \frac{3}{32\sin\frac{t}{2}}$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{t\to 0,\ 2\pi} = +\infty$.



■ Determinaţi curburile următoarelor curbe:

1^o $y^2 = 2px + qx^2$.

2^o $3ay^2 = x^2$. (*parabola semicubică*).

3^o $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$. (*cisoidă*)

4^o $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (*cicloidă*)

5^o

6^o

7^o

8^o

9^o

10^o

11^o

1^o

2^o

3^o

4^o

5^o

6^o

7^o

8^o

9^o

10^o

11^o

■ 1^o *Cicloida*, care are ecuaţia:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

are ca tangentă o dreaptă care întotdeauna determină pe axele de coordonate un segment de lungime constantă.

2^o Să se generalizeze punctul precedent, înlocuind cercul generator al cicloidei cu o dreaptă fixă şi presupunând că punctul curent, situat pe planul cercului mobil, nu mai este situat pe circumferinţă.

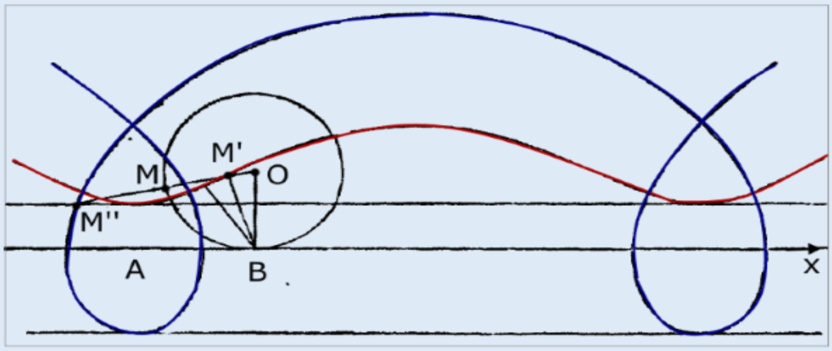
1^o Ecuaţia tangentei este:

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

Segmentele x_0, y_0 pe care această dreaptă le determină pe axele de coordonate, măsurate din origine, au valorile $(a^2x)^{\frac{1}{3}}$ şi respectiv $(a^2y)^{\frac{1}{3}}$, de unde rezultă că acest segment are lungime a.

2^o Când cercul de centru O şi rază $OB=b$ rulează fără alunecare pe dreapta AX, curba generată de un punct M al circumferinţei este o cicloidă.

Dacă vom considera şi dreapta descrisă în acelaşi timp de un punct M', vom avea o *hipoclicloidă*, respectiv o *hipercicloidă* după cum punctul curent este în exteriorul sau în interiorul cercului mobil.



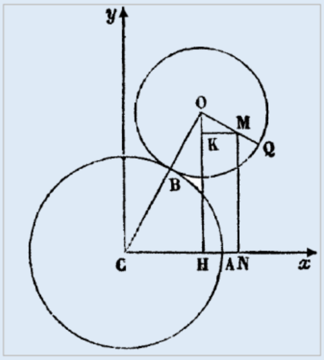
Pentru a obţine ecuaţia locului geometric descris de M', fie h distanţa de la acest punct la centrul cercului, A originea axei absciselor, iar B punctul de contact al cercului cu axa absciselor pentru o anumită poziţie a punctului M'.

Dacă φ este unghiul variabil $M'OB$, atunci:

$$\begin{cases} x=b_\varphi-h\sin\varphi \\ y=b-h\cos\varphi \end{cases}.$$

Sistemul reprezintă o hipercicloidă sau hipocicloiă după cum $h<b$ sau $h>b$. Deducem:

$$x=b\arccos\frac{b-y}{h}-\sqrt{h^2-(b-y)^2}$$



Să determinăm ecuaţia curbei descrisă de punctul M.

Se notează: $BC=a,\ OB=b,\ OM=h,\ CN=x,\ MN=y,\ \angle ACB=\theta.$

Dacă se presupune că în originea mişcării punctele A, Q se suprapun, avem:

$\angle QOB=\frac{a}{b}\theta$ şi deci:

$$(1)\quad \begin{cases} x=CH+HN=(a+b)\cos\theta-h\cos\dfrac{a+b}{b}\theta \\ y=OH-OK=(a+b)\sin\theta-h\sin\dfrac{a+b}{b}\theta \end{cases}$$

Sistemul (1) reprezintă o hipercicloidă sau hipocicloidă după cum $h<b$ sau $h>b$.

S-ar putea obţine o singură ecuaţie prin eliminarea parametrului θ, dar este mai incomod pentru calcul, mai ales când $\frac{a+b}{b}=n$ este iraţional. Astfel, din sistemul (1) se deduce:

$$bn\cos\theta=x+h\cos n\theta,$$
$$bn\sin\theta=y+h\sin n\theta,$$
$$h\cos n\theta=bn\cos\theta-x,$$
$$h\sin n\theta=bn\sin\theta-y;$$

de unde obţinem:

$$b^2n^2=x^2+y^2+h^2+2h\,(x\cos n\theta+y\sin n\theta),$$
$$h^2=x^2+y^2+b^2n^2-2bn\,(x\cos\theta+y\sin\theta),$$

sau mai bine:

$$x\cos n\theta+y\sin n\theta=\frac{b^2n^2-x^2-y^2-h^2}{2h}=p,$$
$$x\cos\theta+y\sin\theta=\frac{x^2+y^2+b^2n^2-h^2}{2bn}=q;$$

De aici se obţine:

$$(x-iy)\mathbb{e}^{2ni\theta}-2p\mathbb{e}^{ni\theta}+(x+iy)=0,$$
$$(x-iy)\mathbb{e}^{2i\theta}-2p\mathbb{e}^{i\theta}+(x+iy)=0.$$

Mai departe:

$$e^{2ni\theta} = \frac{p \pm (p^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{x - iy}, \quad e^{i\theta} = \frac{q \pm (q^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{x - iy},$$

deci:

$$\left[q \pm (q^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\right]^n = (x - iy)^{n-1}\left[p \pm (p^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\right],$$

care este ecuaţia căutată, în care s-a presupus că p, q sunt înlocuite de valorile x, y, care nu pot fi raţionale dacă n nu este raţional.

Sistemul (1) mai poate fi scris sub forma:

$$(1') \quad \begin{cases} he^{ni\theta} - (a+b)e^{i\theta} + x + iy = 0 \\ (x - iy)e^{ni\theta} - (a+b)e^{(n-1)i\theta} + h = 0 \end{cases}.$$

Hipercicloida sau hipocicloida pot fi reprezentate prin sistemul:

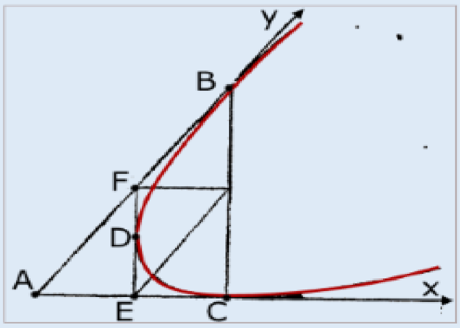
$$(2) \quad \begin{cases} x = (a-b)\cos\theta \; + h\cos\frac{a-b}{b}\,\theta \\ y = (a-b)\sin\theta - h\,\sin\frac{a-b}{b}\,\theta \end{cases}.$$

■ Să se determine lungimea subtangentei la curba definită prin ecuaţia:

$$x = e^{\frac{x-y}{y}}.$$

Se va arăta că subtangenta va avea lungimea: $\frac{x^2}{x-y}$.

■ Se notează AB, AC, EF cele trei tangente care trec prin punctele B, C, D ale unei parabole. Să se demonstreze că paralela dusă prin F la AC se întâlneşte cu paralela dusă prin E la AB pe dreapta de contact AB.



Se notează: $AC = a,\; AB = b$.

Ecuaţia parabolei tangentă la dreptele AB, AC este:

$$(ay - bx)^2 - 2ab(ay + bx) + a^2b^2 = 0,$$

care se poate aduce la forma:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

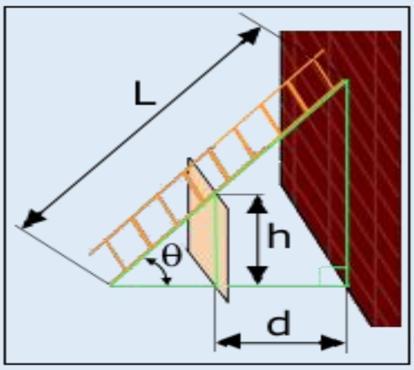
Tangenta EF în punctul (x, y) are ecuaţia:

$$\frac{X}{(ax)^{\frac{1}{2}}} + \frac{Y}{(by)^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

Deci: $\quad AF = (by)^{\frac{1}{2}} = y_0, \; AE = (ax)^{\frac{1}{2}} = x_0$.

Rezultă că punctul (x_0, y_0) este pe dreapta: $\quad \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1$.

■ .. Să se determine lungimea minimă L a unei scări care, rezemată pe un gard de înălţime h, trebuie să ajungă la un perete aflat la distanţa d faţă de gard.



Se notează cu θ unghiul format de scară cu orizontala. Lungimea scării este funcţie de acest unghi:

$$L = \frac{h}{\sin\theta} + \frac{d}{\cos\theta}.$$

Mai departe, $\frac{dL}{d\theta} = -h \cdot \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + d \cdot \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$.

Se pune condiţia: $\frac{dL}{d\theta} = 0$ şi se obţine ecuaţia:

$$h\cos^3\theta = d\sin^3\theta.$$

Rezultă: $\theta = \arctan\sqrt[3]{\frac{h}{d}}$.

Resurse: Aplicaţii ale calculului diferenţial

Calcul integral

Detalii aici

Primitive

Integrala Riemann-Darboux

Se numeşte *diviziune* a intervalului $[a,b] \subset \mathbb{R}$ o mulţime finită de puncte $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cu proprietatea:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Fie o funcţie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită pe $[a,b]$ şi m, M astfel încât:

$$m \le f(x) \le M, \ \forall\, x \in [a,b].$$

Notăm: $m_i = \inf\,\{f(x) |\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\,\{f(x) |\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$

Atunci numerele:

$$U_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})\ , \qquad L_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})$$

se numesc *suma Darboux* superioară, respectiv inferioară a funcţiei f , corespunzătoare diviziunii Δ.

Avem următoarele proprietăţi:

1^o Pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a,b]$ au loc următoarele inegalităţi:

$$m(b-a) \le L_{f(\Delta)} \le U_f(\Delta) \le M(b-a).$$

2^o Mulţimile:

$$L_f = \{L_f(\Delta) \,|\, \Delta \text{ este o diviziune a lui } [a,b]\}$$
$$U_f = \{U_f(\Delta) \,|\, \Delta \text{ este o diviziune a lui } [a,b]\}$$

sunt mărginite şi fie $\mathcal{L}_f = \sup L_f$ şi $\mathcal{U}_f = \inf U_f$. Atunci are loc inegalitatea: $\mathcal{L}_f \le \mathcal{U}_f$.

1^o Avem:

$$U_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M\,(x_i - x_{i-1}) = M \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b-a).$$
$$L_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m\,(x_i - x_{i-1}) = m \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = m(b-a).$$

2^o Fie Δ o diviziune a segmentului $[a,b]$ şi Δ' diviziunea $\Delta' = \Delta \cup \{y\}$, unde $x_{i-1} < y < x_i$ pentru un anumit i, $1 \le i \le n$. Vom arăta că au loc inegalităţile:

$$L_f(\Delta) \le L_f(\Delta') \text{ şi } U_f(\Delta) \le U_f(\Delta').$$

Considerăm numerele: $M_i' = \sup\{f(x) |\, x \in [x_{i-1}, y]\}$ şi $M_i'' = \sup\{f(x) |\, x \in [\,y, x_i]\}$.

Se observă că: $M_i' \le M_i$ şi $M_i'' \le M_i$. Deducem:

$$U_f(\Delta') = \sum_{j=1}^{i-1} M_j\,(x_j - x_{j-1}) + M_i'(y - x_{i-1}) + M_i''(x_i - y) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j\,(x_j - x_{j-1}) \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{i-1} M_j\,(x_j - x_{j-1}) + M_i(x_j - x_{j-1}) + M_i(x_i - y) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j\,(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} M_j\,(x_j - x_{j-1}) = U_f(\Delta).$$

În mod similar se demonstrează şi $L_f(\Delta) \le L_f(\Delta')$.

Se poate afirma acum că, dacă $\Delta'' = \Delta \cup \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, unde y_i sunt numere distincte în $[a,b]$, atunci au loc inegalităţile:

$$L_f(\Delta) \le L_f(\Delta'') \text{ şi } U_f(\Delta'') \le U_f(\Delta).$$

Considerăm acum ouă diviziuni Δ_1 şi Δ_2 ale segmentului $[a,b]$ şi notăm cu Δ_3 diviziunea $\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Pe baza celor demonstrate, avem: $L_f(\Delta_1) \le L_f(\Delta_3)$ şi $U_f(\Delta_3) \le U_f(\Delta_2)$ şi ţinând seama de inegalitatea $L_f(\Delta_3) \le U_f(\Delta_3)$ deducem inegalitatea: $L_f(\Delta_1) \le U_f(\Delta_2)$.
Cu alte cuvinte, orice sumă inferioară este mai mică decât orice sumă superioară, de unde rezultă: $\mathcal{L}_f \le \mathcal{U}_f$.

■ O funcţie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, mărginită pe $[a,b]$ este integrabilă **RIEMANN-DARBOUX** pe $[a,b]$ dacă $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$.
Acestă valoare comună se notează: $\int_a^b f(x)dx = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$
şi se numeşte integrala Riemann-Darboux a funcţiei f pe segmentul $[a,b]$.

1^o Să se demonstreze că funcţia $f:[0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[0,1]$ şi $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.
2^o Funcţia $f:[0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1$ dacă $x \in \mathbb{Q}$ şi $f(x) = 0$ dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nu este integrabilă **RIEMANN-DARBOUX**.

1^o Pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $\Delta_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$, avem:
$U_f(\Delta_n) = \frac{n+1}{2n}$ şi $L_f(\Delta_n) = \frac{n-1}{2n}$ şi astfel: $\frac{n-1}{2n} \le \mathcal{L}_f \le \mathcal{U}_f \le \frac{n+1}{2n}$.
Pentru $n \to \infty$ rezultă $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \frac{1}{2}$.
2^o Oricare ar fi diviziunea Δ avem $L_f(\Delta) = 0$ şi $U_f(\Delta) = 1$. Prin urmare, $\mathcal{L}_f = 0$ şi $\mathcal{U}_f = 1$ şi astfel $\mathcal{L}_f \ne \mathcal{U}_f$.

■ Fie $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii mărginite pe segmentul $[a,b]$. Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile **RIEMANN-DARBOUX** pe $[a,b]$ atunci toate integralele care apar în relaţiile următoare există şi relaţiile sunt adevărate:
1^o $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2^o
3^o
4^o

#f9z

1^o $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2^o
3^o
4^o

■ (*Inegalitatea mediei*) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă, iar $m \le f(x) \le M$, $\forall\, x \in [a,b]$, atunci:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

#zol

Observaţie. Valoarea medie a funcţiei continue $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ pe intervalul $[a,b]$ este numărul real:

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Interpretare geometrică. Presupunem $f \ge 0$. Formula $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$ arată că aria subgraficului lui f este cuprinsă între ariile $M(b-a)$ şi $m(b-a)$, adică între aria dreptunghiului superior şi cel al dreptunghiului inferior, adică această arie este egală cu aria dreptunghiului de laturi $\mathcal{M}(f)$ şi $b-a$.

Interpretare fizică. Din punct de vedere fizic, viteza medie a unui mobil este valoarea medie a vitezei:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{distanţa\ parcursă}{durata\ de\ timp}.$$

Interpretarea diferenţială. Din punctul de vedere al calculului diferenţial, inegalitatea mediei se obţine din teorema lui **Lagrange** aplicată funcţiei:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{pe intervalul } [a, b].$$

Avem: $F(b) - F(a) = (b - a)F'(c),\ c \in (a, b)$ sau:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(c)(b - a), \qquad c \in (a, b).$$

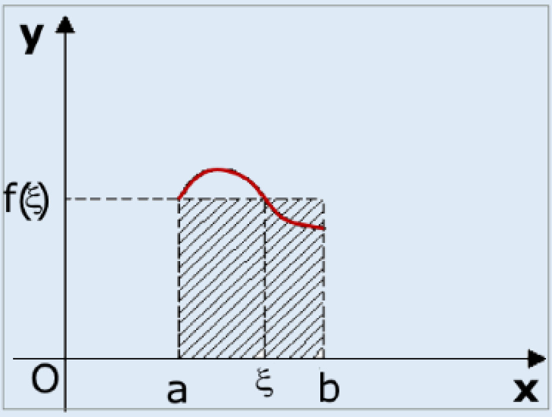
Din $m \leq f(c) \leq M$ se deduce $m(b - a) \leq f(c)(b - a) \leq M(b - a)$.

■ (*Formula de medie* ***Cauchy***). Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a) \cdot f(\xi).$$

#wlh

Interpretare geometrică. Dacă f este o funcţie continuă şi pozitivă pe $[a, b]$, atunci există cel puţin un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încât subgraficul lui f să aibă aceeaşi arie cu dreptunghiul de bază $(b - a)$ şi înălţime $f(\xi)$.



■ (*Teorema fundamentală a calculului integral*). Dacă funcţia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, iar $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa, atunci:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

#z8r

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$, cu:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Mai departe, avem:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] .$$

Conform teoremei valorii medii, există un număr c_i , în intervalul cu numărul de ordine i , astfel încât:

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} .$$

Integrale definite. Exerciţii

1^o Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie descrescătoare şi mărginită superior. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de termen general:

$$a_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

este convergent.

Să se deducă de aici că următoarele şiruri sunt convergente:

2^o $c_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

3^o $a_n = \frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}-\ln(\ln n)$;

4^o $a_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\cdot n^{1-\alpha},\ \alpha\in(0,1)$.

5^o $a_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>1$.

#hyk

Studiem monotonia lui $(a_n)_{n\geq1}$. Avem:

$$a_{n+1}-a_n = f(n+1)-\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x = f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_n^{n+1}\big(f(n+1)-f(x)\big)\mathrm{d}x\leq 0,$$

unde s-a ţinut cont că f este descrescătoare. Rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este descrescător.

Demonstrăm ca şirul este mărginit inferior. Avem:

$$a_n = \left(f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right)+\left(f(2)-\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x\right)+\cdots+\left(f(n-1)-\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x\right)+f(n) =$$

$$=\int_1^2\big(f(1)-f(x)\big)\mathrm{d}x+\int_2^3\big(f(2)-f(x)\big)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\big(f(n-1)-f(x)\big)\mathrm{d}x+f(n),$$

de unde rezultă că $(a_n)_{n\geq1}$ este mărginit inferior.

Prin urmare, şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este convergent.

2^o Se ia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$.

3^o $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$;

4^o $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$;

5^o $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$.

■ Să se determine valoarea medie a funcţiei: $f:[0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

#noj

Valoarea medie este:

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \, dx = -\frac{\cos x}{\pi}\Big|_0^\pi = -\left(\frac{\cos\pi}{\pi} - \frac{\cos 0}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

■ Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_1^{1+x} \ln t \, dt\,.$$

#05z

Conform teoremei de medie, există $\xi \in [1,\ 1+x]$ astfel încât:

$$\int_1^{1+x} \ln t \, dt = x \ln \xi$$

Din $\xi \in [1,\ 1+x$ rezultă: $0 \le \ln\xi \le \ln(1+x)$.

Înmulţim această relaţie cu $x > 0$ şi obţinem:

$0 \le x\ln\xi \le x\ln(1+x)$, iar dacă $x < 0$ vom obţine:

$0 \ge\ x\, ln\,\xi \ge x\ln(1+x)$

Trecând la limită în ultimele inegalităţi deducem:

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln\xi = 0$ (*criteriul cleştelui*).

■ Fie funcţia continuă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ având proprietatea că $3\int_0^1 f(x)dx = 1$.
Să se demonstreze că există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $f(x_0) = x_0^2$.

#d5o

$$3\int_0^1 f(x)dx = 1 \ \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} \ \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{x^2}{3}\Big|_0^\pi = 0 \ \Rightarrow \int_0^1 (f(x) - x^2)\, dx = 0\,.$$

Atunci există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $(f(x_0) - x_0^2)(1-0) = 0$ şi deci $f(x_0) = x_0^2$.

■ Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^4 \int_n^{n+1} \frac{x\, dx}{1+x^5}.$$

#ifs

Conform formulei de medie pentru integrale, există $\xi \in [n, n+1]$ astfel încât $\xi = \xi(n)$:

$$\int_n^{n+1} \frac{x\, dx}{1+x^5} = \frac{\xi}{1+\xi^5}.$$

Dar

$$\frac{n}{1+(n+1)^5} \le \frac{\xi}{1+\xi^5} \le \frac{n+1}{1+n^5}.$$

Prin înmulţire cu n^4 se obţine:

$$\frac{n^5}{1+(n+1)^5} \le n^4\frac{\xi}{1+\xi^5} \le \frac{n^4(n+1)}{1+n^5}.$$

Cu ajutorul criteriului cleştelui, deducem că limita cerută este 1.

■ Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$ pentru care este satisfăcută relaţia:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Să se arate că f are cel puţin un punct fix în intervalul (a,b).

#f0z

Din egalitatea din enunţ deducem:

$$0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\int_a^b [f(x)-x]\mathrm{d}x\,.$$

Aplicând teorema de medie în ultima integrală, rezultă că există un punct $c\in(a,b)$ astfel încâr:

$$0=\int_a^b [f(x)-x]\mathrm{d}x=[f(c)-c](b-a),$$

de unde obţinem că $f(c)=c$, adică f are cel puţin un punct fix în intervalul (a,b).

■ Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$. Să se arate că există un punct $c\in[a,b]$, astfel încât:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(a+b-2c)f(c).$$

#7br

Funcţia auxiliară $h(x)=(b-x)\int_a^x f(t)dt+(x-a)\int_b^x f(t)dt$ este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $h(a)=h(b)=0$.
În baza teoremei lui **Rolle**, există un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $h'(c)=0$.
Derivând pe h şi înlocuind pe x cu c , obţinem egalitatea din enunţ.

■ Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

#skp

Aplicând teorema de medie pentru integrale, rezultă că există $c_n\in(n,n+p)$, astfel încât:

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\sin c_n\int_n^{n+p}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sin c_n\cdot\ \ln x\Big|_n^{n+p}=\sin c_n\cdot\ \ln\frac{n+p}{n},$$

şi deci:

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|\le\ \ln\frac{n+p}{n}.$$

Dar cum $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+p}{n}=0$ rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=0\,.$$

■ Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\,,$$

unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă.

#hvw

Aplicând teorema de medie rezultă că există $c_n\in\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)$ astfel încât:

$$\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(c_n)\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(c_n)\ \ \ln x\Big|_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}=f(c_n)\ln\frac{b}{a}.$$

Dar, din $\frac{a}{n}<c_n<\frac{b}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}\le\lim\limits_{n\to\infty}c_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{n}$ rezultă: $0\le\lim\limits_{n\to\infty}c_n\le 0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.
Cum f este continuă, rezultă că: $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=f(0)$.
Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

■ Să se calculeze:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{b\,\mathrm{d}x}{\varepsilon x^k + a}, \qquad k > 0, a > 0\,.$$

#7sx

Aplicând teorema de medie pentru integrale, rezultă că există $c_\varepsilon \in (0,1)$ astfel încât:

$$\int_0^1 \frac{b\,\mathrm{d}x}{\varepsilon x^k + a} = \frac{b}{\varepsilon c_\varepsilon + a},$$

dar:

$$\frac{b}{\varepsilon + a} < \frac{b}{\varepsilon c_\varepsilon^k + a} < \frac{b}{a}.$$

Deci:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{b}{\varepsilon c_\varepsilon^k + a} = \frac{b}{a},$$

adică:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{b\,\mathrm{d}x}{\varepsilon x^k + a} = \frac{b}{a}.$$

■ Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{n+1}\mathrm{d}x\,.$$

#6ki

$$n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{n+1}\mathrm{d}x = n^2 c_n^{c_n} \int_0^{\frac{1}{n}} x\mathrm{d}x = n^2 c_n^{c_n} \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = -\frac{n^2}{2n^2}\, c_n^{c_n}\,.$$

Dar, din $0 \le c_n \le \frac{1}{n}$ rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$ şi deci

$$\lim_{n \to \infty} c_n^{c_n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{n+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

■ Fie $b \to \infty$ un şir de numere pozitive, iar $f\colon [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ (finit).

Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

$1^o \quad u_n = \displaystyle\int_a^b \frac{f(b_n x)\mathrm{d}x}{1 + x}\,;\;\; 0 < a < b < +\infty\,;$

$2^o \quad u_n = \displaystyle\int_a^b \frac{f(b_n x)\mathrm{d}x}{1 + x}\,;\;\; 0 < a < b < +\infty\,.$

#h2w

Aplicând teorema de medie pentru integrale, rezultă că există $c_n \in (a, b)$ astfel încât:

$$u_n = \int_a^b \frac{f(b_n x)\mathrm{d}x}{1 + x} = f(b_n c_n) \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

Deoarece $a < c_n < b$ rezultă $a b_n < b_n c_n < b b_n$ şi deci $\lim\limits_{n \to \infty} b_n c_n = +\infty$ de unde se obţine: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l \cdot \ln\frac{1+b}{1+a}$.

La fel se procedează şi cu şirul v_n şi se obţine:

$$\lim_{n \to \infty} v_n = l\,(\arctan b - \arctan a).$$

■ Fie $f, F\colon [0, a] \to \mathbb{R},\ a > 0$, unde f este o funcţie continuă şi crescătoare, iar $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pentru orice $x \in [0, a]$.

Să se demonstreze inegalitatea:

$$\int_0^a F(t)dt \geq \frac{a^2}{2} f(0)$$

#nu9

Avem:

$$\int_0^a F(x)dx = \int_0^a \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\,.$$

Aplicând teorema de medie, rezultă că există un punct $c \in (0, x)$ astfel încât:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x)$$

şi egalitatea de mai sus devine:

$$\int_0^a F(x)dx = \int_0^a \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = \int_0^a f(c)x\mathrm{d}x \geq \int_0^a f(0)x\mathrm{d}x = f(0)\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}\,f(0)$$

■ Să se arate că:

$$1 < \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x < \mathrm{e}\,.$$

#ife

Aplicând prima teoremă de medie pentru integrale, rezultă că există $c \in (0,1)$ astfel încât

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{c^2}$$

şi deci din $0 < c < 1$ rezultă inegalitatea din enunţ (e^{x^2} este strict crescătoare pe $(0,1)$).

■ Să se arate că pentru orice $x \in [0,1]$ are loc inegalitatea:

$$\left|\mathrm{e}^{-x^2} - \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}.$$

#fdq

Aplicând teorema de medie pentru integrale şi ţinând seama de faptul că e^{-x^2} este strict crescătoare, obţinem:

$$\mathrm{e}^{-x^2} - \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-c^2} \quad \text{cu } c \in (0,1) \text{ şi}$$

$$\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{0} \leq \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-c^2} < \mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-1} \Rightarrow -\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) < \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-c^2} < 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Dar

$$1 - \frac{1}{\mathrm{e}} < \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}.$$

■ Să se arate că:

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6}.$$

#w36

Aplicând teorema de medie pentru integrale, rezultă că există $c_n \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ astfel încât:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-c_n^{2n}}} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2})}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left.\arcsin x\right|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \arcsin\frac{1}{2} = \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

■ Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcţia $f_n: [0, n] \to \mathbb{R}$ dată de $f_n(x) = \arctan([x])$, unde $[x]$ reprezintă *partea întreagă* a numărului real x. Să se arate că f_n este integrabilă şi să se determine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Funcţia f_n este egală cu constanta $f_n(i)$ pe $[i, i+1] \setminus \{i+1\}$, $i \in \overline{0, n-1}$, deci este integrabilă pe fiecare interval $[i, i+1]$.

$$\int_0^n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1}\int_i^{i+1} f_n(i)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \arctan i.$$

Conform teoremei **Stolz-Cesaro**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan 1 + \arctan 2 + \cdots + \arctan n}{n} = \lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

■ Fie $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă şi fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Să se arate că şirul $(s_{n+1} - s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent către $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Folosind teorema lui **Lagrange**, obţinem:

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - \sum_{k=1}^{n+1}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right) =$$

$$= f(1) - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kf'(x_k)\,, \quad \frac{k}{n+1} < x_k < \frac{k}{n}\,, \qquad k = 1,2,\dots,n.$$

Dacă $f' \geq 0$, atunci

$$\frac{x_k f'(x_k)}{n+1} \leq \frac{kf'(x_k)}{n(n+1)} \leq \frac{x_k f'(x_k)}{n}\,, \qquad k = 1,2,\dots,n.$$

Deci:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k\, f'(x_k) < \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\, f'(x_k) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\, f'(x_k)\,.$$

Deoarece $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reprezintă o familie de puncte intermediare asociate diviziunii $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kf'(x_k) = \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x = \left. xf(x)\right|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aplicaţii ale integralei

3.3.. *Lungimea unui arc de curbă* pe $[t_0, t]$:

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} \|\overline{r'}(u)\| du$$

Să se calculeze lungimea cercului centrat în origine şi de rază R.

$\mathcal{C}(O, R)$: $\bar{r}(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

#vyl

Avem: $\|\overline{r'}(u)\| = R$ şi $L(t) = R$.

Observaţie. Dacă inversăm funcţia $s(t) = Rt$, avem $t = \frac{s}{R}$ şi rezultă parametrizarea canonică a cercului:

$$\mathcal{C}(O, r): \ \bar{h}(s) = R\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right), \qquad s \in [0, \ L(2\pi) = 2\pi R]$$

Să se calculeze lungimile următoarelor arce de curbă:

1^o Arcul $[0, 2\pi]$ al *ciclodei:* $\bar{r}\ (t) = R(t - \sin t\,,\ 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, unde $R > 0$ este o constantă dată.

2^o Arcul $[0, 2\pi]$ al *astroidei:* $\bar{r}\ (t) = R(\cos^3 t\,,\ \sin^3 t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3^o Arcul $[0, 2]$ al curbei: $\bar{r}\ (t) = \left(t - \frac{1}{2} sh\, t,\ ch\, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

#7p0

1^o Avem: $\bar{r}'\ (t) = R(1 - \cos t\,, \sin t)$ şi deci: $\|\bar{r}'(t)\| = R\sqrt{1 - 2\cos t + 1} = 2R\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. Mai departe:

$$L\left(\mathcal{C}\,\big|_{[0,2\pi]}\right) = 2R \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = -4R\cos\frac{t}{2}\,\Big|_0^{2\pi} = 8R.$$

2^o $\bar{r}'\ (t) = 3R(-\cos^2 t \sin t\,, \sin^2 t \cos t)$ şi deci: $\|\bar{r}'(t)\| = 3R|\cos t \sin t| = \frac{3R}{2}\ |\sin 2t|$.

$$L\left(\mathcal{C}\,\big|_{[0,2\pi]}\right) = \frac{3R}{2} = \frac{3R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = -\frac{3R}{4}\cos 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R}{2}.$$

3^o $\bar{r}'(t) = (1 - ch\, t,\ 2sh\, t)$ şi $1 - ch\, 2t = 1 - \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = -\frac{\left(e^t - e^{-t}\right)^2}{2} = -2\, sh^2 t$. Deci:

$$\bar{r}'(t) = 2sh\, t\, (-sh\, t, 1)$$

Se consideră *spirala logaritmică*: $\bar{r}\ (t) = R\left(e^{kt}\cos t\,,\ e^{kt}\sin t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, cu $R > 0, k > 0$ constante date.

1^o Să se arate că unghiul dintre $\bar{r}\ (t)$ şi $\bar{r}'\ (t)$ este constant.

2^o Notând cu l_n lungimea arcului $[2n\pi,\ 2(n+1)\pi]$ să arate că raportul $\frac{l_{n+1}}{l_n}$ este constant.

#ft7

1^o Avem: $\bar{r}'(t) = Re^{kt}\ (k\cos t - \sin t\,,\ ksin\, t + \cos t)$ şi deci $\|\bar{r}'(t)\| = Re^{kt}\sqrt{k^2 + 1}$, $\|\bar{r}\ (t)\| = Re^{kt}$ şi $< \bar{r}\ (t),\ \bar{r}'(t) > = R^2 k e^{2kt}$. Rezultă:

$\cos\angle(\bar{r}\ (t),\ \bar{r}'(t)) = \frac{<\bar{r}\ (t), \bar{r}'(t)>}{\|\bar{r}\ (t)\| \cdot \|\ \bar{r}'(t)\|} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$.

2^o $l_n = R\sqrt{k^2 + 1}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{kt} dt = \frac{R\sqrt{k^2+1}}{k}\left(e^{2(n+1)k\pi} - e^{2nk\pi}\right)$,

de unde rezultă $\frac{l_{n+1}}{l_n} = e^{2k\pi}$, care este o constantă strict mai mare decât 1.

■ În coordonate polare în plan:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

ecuaţia curbei plane se scrie:

$\mathcal{C}: \rho = \rho(\varphi),\ \ \varphi \in I = (a, b) \in \mathbb{R}$.

Se cere lungime curbei în coordonate polare.

#usb

Avem ecuaţia vectorială:

$\mathcal{C}:\ \bar{r}(\varphi) = (\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \ \rho(\varphi)\sin\varphi)\,, \varphi \in I.$

Rezultă: $\bar{r}'(\varphi) = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi,\ \ \ \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)$

şi deci: $\|\bar{r}'(\varphi)\| = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$,

ceea ce implică: $L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho')^2(\varphi)}\ d\varphi$

■ Să se determine lungimea arcului de cicloidă din figură şi coordonatele centrului de greutate al acesteia.
Cicloida este definită prin ecuaţiile parametrice:

$x = R(\theta - \sin\theta),\ \ y = R(1 - \cos\theta),$

unde R este raza cercului generator şi θ unghiul de rotaţie al acesteia.

#5x9

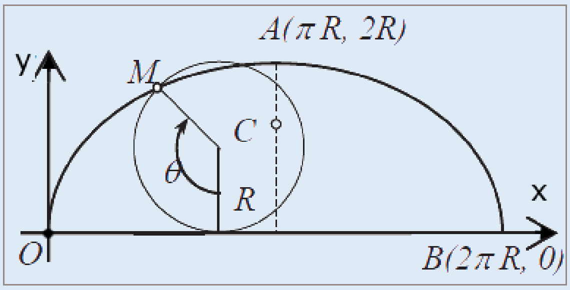
Se calculează derivatele şi arcul elementar:

$$x' = R(1 - \cos\theta), \qquad y' = R\sin\theta \qquad (1)$$

$$\mathrm{d}s = R\sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2R\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta \qquad (2)$$

Se utilizează formulele:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t\,,\quad x_C = \frac{1}{l}\int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t\,,\quad y_C = \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t \qquad (3)$$



Se obţin:

$$l = 2R\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 8R$$

$$x_C = \frac{2R^2}{l}\int_0^{2\pi} (\theta - \sin\theta)\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \pi R$$

$$y_C = \frac{2R^2}{l}\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}R\,.$$

■ Să se determine lungimea şi coordonatele centrului de greutate pentru arcul de parabolă.

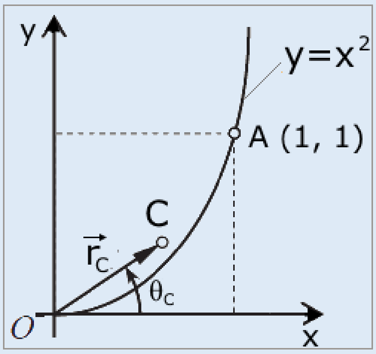
#nkd

Ecuaţia parabolei este: $y = x^2$.

Rezultă: $y' = 2x\,,\ \mathrm{d}s = \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$.

Se aplică formulele:

$$\begin{cases} l = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x \\ x_C = \dfrac{1}{l}\cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} x\,\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x \\ y_C = \dfrac{1}{l}\cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} y\,\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$



În cazul nostru se obţine:

$$\begin{cases} l = \int\limits_0^x \sqrt{1+4x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \dfrac{1}{4}\arg sh\,(2x) \\ x_C = \dfrac{1}{l}\int\limits_0^x x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \dfrac{1}{12l}\,\sqrt{(1+4x^2)^3} \\ y_C = \dfrac{1}{l}\int\limits_0^x x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = \\ = \dfrac{1}{16l}\left(x\sqrt{(1+4x^2)^3} - \dfrac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} - \dfrac{1}{4}\arg sh\,(2x)\right) \end{cases}$$

În cazul $A(1,1)$ se obţin valorile numerice: $l = 1{,}479\,,\ x_C = 0{,}630\,,\ y_C = 0{,}410\,.$

■ Să se studieze forma pe care o dobândeşte un fir greu suspendat între două puncte.

#170

Vectorul de poziţie al unui punct curent de pe fir are forma:

$$\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\,. \qquad (1)$$

Ţinând cont că versorul tangentei este dat de:

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\,,. \qquad (2)$$

se poate scrie:

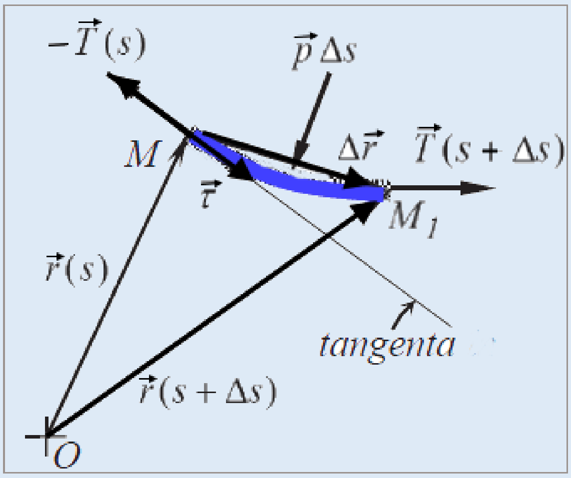
$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\vec{k}\,. \qquad (3)$$

Se studiază echilibrul segmentului de fir elementar $MM_1 = \Delta s$. Luând ca reper un punct O, poziţia relativă a punctului M_1 faţă de M este definită prin vectorul:

$$\overrightarrow{MM_1} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s). \qquad (4)$$

Forţa exterioară distribuită care acţionează asupra segmentului elementar se poate considera constantă pe lungimea acestuia şi poate fi redusă la o rezultantă $\vec{p}\Delta s$ aplicată la mijlocul segmentului.
La extremităţile acestuia se introduc tensiunile corespunzătoare secţiunilor respective.
Echilibrul segmentului sub acţiunile celor trei forţe se descrie prin relaţiile vectoriale:

$$\tau_M \begin{cases} \left(\sum \vec{F}_i = 0\right) & \vec{T}(s+\Delta s) - \vec{T}(s) + \vec{p}\Delta s = 0 \\ \left(\sum \vec{M}_M\right) = 0 & \Delta\vec{r}\times\vec{T}(s+\Delta s) + \dfrac{\Delta\vec{r}}{2}\times(\vec{p}\Delta s) = 0 \end{cases}. \qquad (5)$$



Se împarte fiecare relaţie la Δs şi se calculează limitele fiecărui termen atunci când $\Delta s \to 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta s\to 0} \dfrac{\vec{T}(s+\Delta s)-\vec{T}(s)}{\Delta s} + \lim\limits_{\Delta s\to 0} \vec{p} = 0 \\ \lim\limits_{\Delta s\to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \times \lim\limits_{\Delta s\to 0} \vec{T}(s+\Delta s) + \lim\limits_{\Delta s\to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{2} \times \lim\limits_{\Delta s\to 0} \vec{p} = 0 \end{cases} . \qquad (6)$$

Deoarece forţa distribuită $\vec{p}$ poate fi considerată constantă pe segmentul Δs, se poate scrie:

$$\lim_{\Delta s\to 0} \vec{p} = \vec{p}\,. \qquad (7)$$

Atunci când $\Delta s \to 0$ punctul M_1 tinde către M şi deci $\Delta\vec{r} \to 0$; în consecinţă:

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{2} = 0\,. \qquad (8)$$

Pentru tensiunea în fir sunt valabile relaţiile:

$$\lim_{\Delta s\to 0} \vec{T}(s+\Delta s) = \vec{T}(s) = \vec{T}. \qquad (9)$$

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\vec{T}(s+\Delta s)-\vec{T}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{T}}{ds}. \qquad (10)$$

În continuare:

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \cdot \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \right) = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \cdot \lim_{\Delta s\to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = \vec{\tau} \cdot 1 = \vec{\tau}\,, \qquad (11)$$

care se mai poate evalua şi în modul următor:

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\vec{r}(s+\Delta s)-\vec{r}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,. \qquad (12)$$

Prin echivalarea celor două relaţii se obţine:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \qquad (13)$$

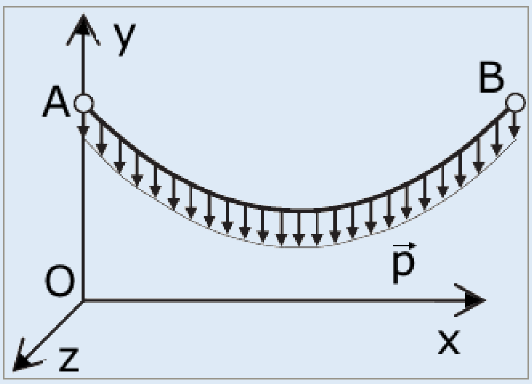
La limită, când M_1 se suprapune peste M, dreapta MM_1 devine tangenta în M la curba firului iar vectorul $\vec{\tau}$ este versorul acestei tangente. Cea de-a doua relaţie (6) devine:

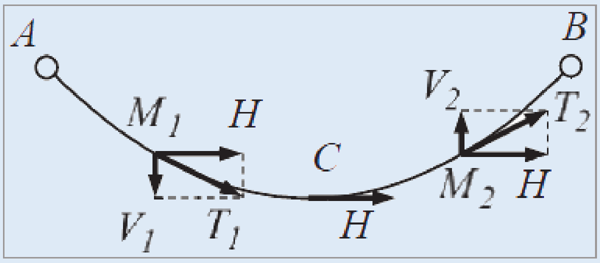
$$\vec{\tau} \times \vec{T} = 0\,. \qquad (14)$$

Deci vectorul tensiunii va avea direcţie tangentei la fir în punctul M.

Deci ecuaţiile de echilibru (6) devin:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0. \qquad \vec{T} = \vec{T}\vec{\tau}. \qquad (15)$$





■ (*Funcţiile Beta şi Gamma ale lui* ***Euler***). Funcţiile $B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ se definesc prin:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\,,\qquad a,b\in(0,\infty);$$

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\mathrm{d}x\,,\qquad a\in(0,\infty);$$

Au loc relaţiile:

1^o $B(a,b)=B(b,a),\ \ a,b>0;$

2^o $B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\,B(a,b-1),\ \ a>0,b>1\,;$

$$B(a,b)=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,\mathrm{d}x\,,\qquad a,b>0\,;$$

3^o $\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a),\ a\in(0,\infty);$

4^o $\Gamma(n+1)=n!\ ,\ n\in\mathbb{N}\,;$

5^o $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ ,\ a,b>0\,;$

6^o $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,;$

7^o $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin(a\,\pi)}\ ,\ a\in(0,1);$

8^o $\Gamma(a)=\lim\limits_{n\to\infty} n^a\cdot\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\ ,\ a>0\,.$

#zdr

■ Fie: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{d}x\ ,\ n\in\mathbb{N}.$

1^o Să se arate că $I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}\,,\ n\geq 2$ şi să se calculeze I_n.

2^o Să se calculeze *formula lui* ***Wallis***

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2.$$

#up6

1^o $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\ (-\cos x)'\mathrm{d}x=\ -\sin^{n-1}x\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x=$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\,,$

de unde rezultă relaţia din enunţ. Din relaţia de recurenţă se obţine:

$$I_n=\begin{cases}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2k}\cdot\frac{\pi}{2}\ ,\ n=2k\\ \frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\ ,\ \ n=2k-1\end{cases}.$$

2^o Are loc relaţia evidentă:

$$\sin^{2n+1}x\leq\sin^{2n}x\leq\sin^{2n-1}x\,,\qquad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\qquad n\in\mathbb{N}^*\,,$$

care integrată pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ conduce la inegalitatea:

$$I_{2n+2}\leq I_{2n}\leq I_{2n-1}$$

de unde împărţind cu I_{2n+1} obţinem:

$$1\leq\left(\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}\right)^2\cdot\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\leq\frac{2n+1}{2}\qquad\text{sau}\qquad \pi\leq\left(\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\leq\pi\,\frac{2n+1}{2n}.$$

■ (*formula lui STIRLING*). Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $\theta_n \in (0,1)$ astfel ca:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

(vezi detalii aici)

#be3

Considerăm şirul:

$$(a_n)_{n\geq 1}, \qquad a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad n \geq 1$$

şi demonstrăm că acesta este descrescător:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \qquad n \geq 1.$$

Din dezvoltările în serie de puteri:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad |x| < 1$$

obţinem:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots\right), \qquad |x| < 1.$$

Punând $x = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ în relaţia de mai sus, avem:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots$$

de unde deducem:

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}. \qquad \mathbf{(1)}$$

Rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi fiind mărginit inferior, este convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Din relaţia (1) obţinem:

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}, \qquad n \geq 1,$$

deci şirul $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ este crescător şi are limita a. Prin urmare are loc relaţia:

$$a < a_n < a^{\frac{1}{12n}}, \qquad \forall\, n \geq 1$$

deci există $\theta_n \in (0,1)$ astfel ca:

$$a_n = a \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \qquad n \geq 1. \quad \mathbf{(2)}$$

Demonstrăm în continuare că $a = \sqrt{2\pi}$.

in formula lui **WALLIS** rezultă că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \qquad \mathbf{(3)}$$

este convergent şi are limita $\sqrt{\pi}$.

in relaţia (2) obţinem:

$$n! = a\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0,1) \quad \mathbf{(4)}$$

$$(2n)! = a\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}\cdot e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}, \qquad \theta_{2n} \in (0,1)$$

care înlocuite în (3) conduc la:

$$b_n = \frac{a}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{\theta_n}{6n} - \frac{\theta_{2n}}{24n}}.$$

Rezultă ă $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}\, b_n = \sqrt{2\pi}$.

Înlocuind în (4) obţinem:

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\theta_n}{12n}.$$

Serii de funcţii

■ Seriile trigonometrice sunt serii de funcţii a căror formă standard este:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

unde $a_n\in\mathbb{R}$ (cu $n\in\ \mathbb{N}$) şi $b_n\in\mathbb{R}$ (cu $n\in\ \mathbb{N}^*$) se numesc coeficienţii seriei considerate.
Suma parţială:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

poartă numele de *polinomul trigonometric* de ordinul n al seriei trigonometrice (1).
Şirul de serii trigonometrice:

$$\frac{1}{2},\cos x\,,\sin x\,,\cos 2x\,,\sin 2x\,,\ldots,\cos nx\,,\sin nx\,,\ldots \qquad (2)$$

se numeşte *sistem trigonometric*.

Observaţii.
1^o Seriile trigonometrice apar frecvent în studiul proceselor oscilatorii. Cu ajutorul acestora se pot reprezenta mult mai generale decât cele analitice.
2^o Dacă seria trigonometrică (1) converge într-un punct $x_0\in\mathbb{R}$, atunci aceasta converge în orice punct $x_0+2k\pi$, unde $k\in\mathbb{Z}$.
3^o Dacă seria (1) converge pe intervalul $[-\pi,\pi]$, atunci aceasta converge pe $\mathbb{R}$ şi suma sa $f(x)$ este o funcţie 2π-periodică.
4^o Dacă seria (1) este uniform convergentă pe $(-\pi,\pi)$, atunci suma sa $f(x)$ este o funcţie 2π-periodică şi continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.
5^o Observaţiile precedente arată că este suficient să studiem convergenţa seriilor trigonometrice pe un interval de lungime 2π – de exemplu pe $[-\pi,\pi]$.

(*Proprietatea de ortogonalitate a sistemului trigonometric*) Oricare doi termeni diferiţi din sistemul trigonometric (2) sunt ortogonali, adică au loc relaţiile:

1^o $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x=0\,,\qquad \forall\, m,n\in\mathbb{N}\,;$$

2^o $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=0\,,\qquad \forall\, m,n\in\mathbb{N}\,,m\neq n\,;$$

3^o $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=0\,,\qquad \forall\, m,n\in\mathbb{N}\,,m\neq n\,;$$

În plus,

4^o $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi\,,\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*\,;$$

5^o $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi\,,\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*\,;$$

6^o $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 0x\,\mathrm{d}x=2\pi\,.$$

#nn4

1^o *sin* este funcţie impară, *cos* este pară, deci produsul de sub integrală este o funcţie impară. Se ştie că integrala **Riemann** dintr-o funcţie impară pe un interval mărginit, centrat în origine, este nulă.

2^o $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right|_{-\pi}^{\pi}-\left.\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n}-\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n}-\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}+\frac{\sin(-(m-n))\,\pi}{m+n}\right]=0\,,\qquad \forall\, m.n\in\mathbb{N}, m\neq n\,;$$

3^o
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,[\cos(m-n)x\cos(m+n)x\,]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n}-\frac{\sin(n-m)\pi}{m-n}+\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}-\frac{\sin(-(m-n))\,\pi}{m+n}\right]=0,\ \ \forall\, m,n\in\mathbb{N}\,, m\neq n\,;$$

4^o
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\pi-(-\pi)+\frac{\sin 2n\pi}{2n}-\frac{\sin(-2n\pi)}{2n}\right]=\pi\,,\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*\,;$$

5^o
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\pi-(-\pi)-\frac{\sin 2n\pi}{2n}+\frac{\sin(-2n\pi)}{2n}\right]=\pi\,,\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*\,;$$

6^o
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 0x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\ =2\pi\,.$$

■ Dacă seria trigonometrică (1) este uniform convergentă pe $[-\pi,\pi]$ şi $f(x)$ este suma sa, atunci coeficienţii a_n , $n\in\mathbb{N}$ şi b_n, $n\in\mathbb{N}^*$, sunt determinaţi de f prin formulele **EULER-FOURIER**:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,,\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$$
(3)
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\,,\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

#d5h

Înmulţim toţi termenii seriei (1) cu $\cos mx$, unde $m\in\mathbb{N}$ şi obţinem o serie uniform convergentă pe $[-\pi,\pi]$, cu forma $f(x)\cos mx$:

$$\frac{a_0}{2}\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx+b_n\sin nx\cos mx)=f(x)\cos mx.$$

Integrând în această relaţie termen cu termen pe $[-\pi,\pi]$ şi folosind subpunctele $1^o,3^o,4^o$ ale propoziţiei anterioare, rezultă că:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x=a_m\pi\,,$$

pentru $m\in\mathbb{N}^*$, de unde se obţine formula lui a_m, pentru $m\in\mathbb{N}^*$. Dacă $m=0$, folosim subpunctele $1^o,3^o,6^o$ ale propoziţiei anterioare şi obţinem:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 0x\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\cdot 2\,\pi$$

deci a_0 verifică aceeaşi formulă (3).

Analog, înmulţind toţi termenii seriei (1) cu $\sin mx$, unde $m\in\mathbb{N}^*$, integrând termen cu termen pe $[-\pi,\pi]$ şi folosind subpunctele $1^o,2^o,5^o$, rezultă că:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x=\ b_m\pi\,,$$

de unde se obţine formula lui b_m.

Observaţie. Această teoremă sugerează ideea de a asocia unei funcţii 2π-periodice $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o serie trigonometrică în care coeficienţii a_n şi b_n să fie daţi de formulele Euler-Fourier, precum şi problema de a stabili condiţii care să asigure că f este suma acestei serii (cu alte cuvinte, problema *reprezentării funcţiei f printr-o serie trigonometrică*). Pentru ca integralele din formulele (3) să fie convergente, vom adăuga ipoteza ca integrala $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x$ să fie convergentă (adică $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$). Într-adevăr, în această ipoteză:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\cos nx|\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\cdot|\cos nx|\mathrm{d}x \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\, nx\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\cdot|\sin nx|\mathrm{d}x < \infty$$

■ Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie 2π-periodică, cu :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty\,.$$

1^o Prin coeficienţii **FOURIER** ai lui f înţelegem numerele:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,;$$

(am explicat mai sus că aceşti coeficienţi există).

2^o Prin seria **FOURIER** a funcţiei f înţelegem seria trigonometrică (1), ai cărei coeficienţi se iau coeficienţii **FOURIER** ai lui f. Faptul că funcţiei f i-am asociat seria sa **FOURIER** se notează:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

3^o Polinomul trigonometric de ordinul n al seriei **FOURIER** asociată funcţiei f se numeşte polinomul **FOURIER** de ordinul n al funcţiei f.

Dacă seria trigonometrică (1) este uniform convergentă pe $[-\pi,\pi]$, atunci aceasta este seria **FOURIER** asociată sumei sale.

#6bm

■ Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie 2π-periodică, cu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty\,.$$

1^o Dacă f este pară pe $[-\pi,\pi]$, atunci coeficienţii săi **FOURIER** sunt:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\;\,\mathrm{d}x\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \;\text{ şi } b_n = 0, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

iar:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

2^o Dacă f este impară pe $[-\pi,\pi]$, atunci coeficienţii săi **FOURIER** sunt:

$$a_n = 0\,, \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \text{şi} \;\; b_n = \int_0^{\pi} f(x)\sin nx\;\,\mathrm{d}x\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,$$

iar

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,.$$

#m3s

Se utilizează definiţia coeficienţilor **FOURIER** şi următoarele rezultate:

- *sin* este funcţie impară pe $[-\pi,\pi]$ (chiar pe $\mathbb{R}$), iar *cos* funcţie pară;
- produsul a două funcţii pare (respectiv, impare) este o funcţie pară; produsul unei funcţii pare cu una impară este o funcţie impară;
- integrala **RIEMANN** a unei funcţii impare pe un interval de forma $[-\alpha,\alpha]$ $(\alpha > 0)$ este 0; integrala **RIEMANN** a unei funcţii pare pe un interval de forma $[-\alpha,\alpha]$ $(\alpha > 0)$ este dublul valorii acelei integrale pe intervalul $[0,\alpha]$.

Observaţie. Fiecărei funcţii $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodice, cu $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\mathrm{d}x$ convergentă, îi corespunde o singură serie **FOURIER**. Reciproca nu este, în general, adevărată. Astfel, dacă funcţia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodică, diferă de funcţia f de mai sus pe o mulţime finită de puncte din $[-\pi,\pi]$, atunci g şi f, deşi distincte, au aceeaşi coeficienţi **FOURIER**, deci aceeaşi serie **FOURIER**.

■ Fie $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodice cu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)|\mathrm{d}x < \infty\,, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x)|\mathrm{d}x < \infty$$

Dacă f_1 şi f_2 sunt continue într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, atunci seriile Fourier asociate funcţiilor f_1 şi f_2 sunt diferite între ele.

#vxp

■ Dacă seria Fourier a unei funcţii $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodică şi continuă pe $\mathbb{R}$, este uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$, atunci suma ei este f.

#myb

■ Dacă funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este 2π-periodică şi derivabilă pe $[-\pi, \pi]$, cu excepţia unui număr finit de puncte, cu derivata continuă, atunci seria sa Fourier converge în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$ la $\frac{1}{2}\lim\limits_{y \searrow x} f(y) + \lim\limits_{y \nearrow x} f(y)$.

#32l

■ În domeniul complex, seria Fourier şi coeficienţii Fourier asociaţi unei funcţii $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodice, cu $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$, se reprezintă prin formulele:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}\,, \qquad \text{unde } c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{C}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Legătura dintre coeficienţii $c_n \in \mathbb{C}$ şi coeficienţii $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ este:

$$2c_n = \begin{cases} a_n - \boldsymbol{i}b_n\,, & n \in \mathbb{N}^* \\ a_0 & n = 0 \\ a_{-n} + \boldsymbol{i}n_{-n}\,, & n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

#6v8

Pentru demonstraţie se utilizează formula: $\quad \mathrm{e}^{\boldsymbol{i}x} = \cos x + \boldsymbol{i}\sin x$.

■ Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodică, cu $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$. Dintre toate polinoamele trigonometrice de ordin n,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\,, \qquad cu\ \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},$$

polinomul **Fourier** de ordinul n asociat lui f,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\,,$$

(unde $a_k,\ k = \overline{0, n}$ sunt coeficienţii **Fourier** ai lui f) realizează cea mai bună aproximaţie medie pătratică a lui f, adică:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \text{ , pentru orice } T_n\,.$$

#xwo

■ Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este 2π-periodică, cu $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ convergentă, atunci:

1^o Seria **Fourier** a lui f converge în medie pătratică la f, adică:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

unde S_n este polinomul **Fourier** de ordin n a lui f;

2^o
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

(identitatea lui **Parseval**)

■ Să se determine seria Fourier asociată unei funcţii $2l$-periodice, $l > 0$.

#7ey

Pentru funcţii $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2l$-periodice, cu $\int_{-l}^{l} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, rezultatele anterioare se transpun efectuând substituţia $x \to \frac{\pi x}{l}$.
Obţinem seria trigonometrică:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

şi coeficienţii **FOURIER**:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,,n\in\mathbb{N}\quad \text{şi}\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,,n\in\mathbb{N}^*$$

Dacă f este pară pe $[-1,1]$, atunci:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,,\forall\, n\in\mathbb{N}\quad \text{şi}\quad b_n=0\,,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\quad \text{iar}\quad f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Dacă f este impară pe $[-l,l]$, atunci:

$$a_n=0\,,\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{şi}\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,,\forall\, n\in\mathbb{N}^*,$$

iar $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$.

ANALIZA COMPLEXA

CUPRINS

Mulţimea numerelor complexe

Noţiunea de număr complex

■ Pe mulţimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se definesc două operaţii:

- ''adunare'': $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$;
- ''înmulţire'': $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1$.

Tripletul $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ are structură de corp comutativ.

#0xf

Se arată că $(\mathbb{R}^2, +)$ este grup abelian, $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ este monoid comutativ, operaţia ''$\cdot$ '' este distributivă faţă de ''+'' şi orice element nenul este inversabil (orice element diferit de $(0,0)$ este simetrizabil în raport cu înmulţirea definită mai sus).

■ Mulţimea $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se numeşte <u>*mulţimea numerelor complexe*</u> şi se notează $\mathbb{C}$. Un element al acestei mulţimi se numeşte <u>*număr complex*</u>.

Să se demonstreze că submulţimea $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) |\ x \in \mathbb{R}\}$ este izomorfă cu mulţimea numerelor reale.

#mrc

Se consideră omeomorfismul bijectiv $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\},\ \varphi(x) = (x, 0)$.

■ Dacă se notează $\boldsymbol{i} = (0, 1)$, atunci mulţimea numerelor complexe este:

$\mathbb{C} = \{z = x + \boldsymbol{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. (*forma algebrică a unui număr complex*)

#491

■ Pentru un număr complex $z = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R}$ se definesc următoarele:

- $\mathcal{Re}\ z = x$, *partea reală* a lui z;
- $\mathcal{Im}\ z = y$, *partea imaginară* a lui z;
- $\bar{z} = x - \boldsymbol{i}y$, *conjugatul* lui z;
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, *modulul* lui z.

Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

1^o Pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avem: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathcal{Re}\ z_1 = \mathcal{Re}\ z_2 \wedge \mathcal{Im}\ z_1 = \mathcal{Im}\ z_2$;

2^o $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,\ |z_1 \cdot z_2| \leq |z_1| \cdot |z_2|,\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

3^o $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$;

4^o $|z| = |\bar{z}|,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$;

5^o $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

6^o $\mathcal{Re}\, z/|z| \in [-1, 1],\ \mathcal{Im}\ z/|z| \in [-1, 1],\ \forall\, z \in \mathbb{C}^*$;

unde s-a notat $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

#u0d

■ (<u>*Forma trigonometrică a unui număr complex*</u>). Pentru orice număr complex nenul $z \in \mathbb{C}^*$există un $\theta \in [0, 2\pi)$ (şi este unic!) astfel încât: $z = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$.

#dg7

Pentru $z = x + \boldsymbol{i}y,\ x, y \in \mathbb{R},\ z \neq 0$, avem $\theta = \arctan\frac{y}{x} + k\pi$, unde:

$$k = \begin{cases} 0\,, & \text{dacă } x, y > 0 \\ 1\,, & \text{dacă } x < 0 \\ 2\,, & \text{dacă } x > 0\,,\ \ y < 0 \end{cases}.$$

Pentru $x > 0,\ y = 0$ avem $\theta = 0$; pentru $x = 0, y > 0$ avem $\theta = \frac{\pi}{2}$; pentru $x < 0, y = 0$ avem $\theta = \pi$, iar pentru $x = 0, y < 0$ avem $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Observaţie. În cazul $z = 0$, valoarea θ poate fi aleasă arbitrar.

■ Valoarea lui θ (unic determinată, conform exerciţiului anterior) se numeşte <u>*argument principal*</u> şi se notează $\arg z$.

Să se demonstreze că, dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, atunci:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

$\arg(z_1 \,/\, z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$.

Să se deducă de aici că, dacă $z \in \mathbb{C}$, $\arg(z^n) = n \arg z \pmod{2\pi}$.

#3st

■ (*Radicalul complex*). Dându-se un număr complex $z \in \mathbb{C}$ şi un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, să se determine (dacă există) acele numere $u \in \mathbb{C}$ astfel încât $u^n = z$.

#u3r

Fie $z = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$, cu $r = |z| > 0$ şi $\theta = \arg z \in [0, 2\,\pi)$.
Se caută $\rho = |u| > 0$ şi $\varphi = \arg u \in [0, 2\,\pi)$ încât $[\rho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)]^n = r\,(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$
Avem:

$$\begin{cases} \rho^n \cos n\varphi = r\cos\theta \\ \rho^n \sin n\varphi = r\sin\theta \end{cases}.$$

De aici $\rho^n = r, \cos n\varphi = \cos\theta$ şi $\sin n\varphi = \sin\theta$.
Astfel se deduce formula pentru radicalul complex:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\,\pi}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\theta + 2k\,\pi}{n}\right), \qquad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Noţiunea de număr complex. Exerciţii

■ Să se arate că pentru $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, numărul $z = (1 + a\boldsymbol{i})^n + (1 - a\boldsymbol{i})^n$ este real.

#hz8

Avem: $\bar{z} = \overline{(1 + a\iota)^n} + \overline{(1 - a\iota)^n} = (1 - a\boldsymbol{i})^n + (1 + a\boldsymbol{i})^n = z.$

■ Să se arate că pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ are loc egalitatea:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \le 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Se ''demodulează'' membrul stâng astfel

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}),$$

după care se aplică proprietatea $5^o \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ şi se operează parantezele.

■ Să se determine $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$|z - \boldsymbol{i}| = |z + \boldsymbol{i}| = |z - 1|\,.$$

#cxn

$z = 0$ (algebric, căutând $z = x + \boldsymbol{i}y\,,\ x, y \in \mathbb{R}$ sau geometric).

■ Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze $x_1^{2007} + x_2^{2007}$ şi $(x_1 + 1)^{2008} + (x_2 + 1)^{2008}$.

#iju

$$x_1^{2007} + x_2^{2007} = 2\,, \qquad (x_1 + 1)^{2008} + (x_2 + 1)^{2008} = -1$$

■ Să se arate că pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ are loc egalitatea:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 + z_3|^2 + |z_2 + z_3|^2\,.$$

Să se dea o interpretare geometrică acestei relaţii.

#thr

Se foloseşte relaţia $\quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}.$

■ Fie $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ cu $|z_k| = 1\,,\ k \in \{1,2, \dots, n\}$. Să se arate că numărul:

$$z = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)$$

este real.

#9ig

Se foloseşte proprietatea: $\quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

■ Fie $u, v, z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|u| < 1$ şi $|v| < 1$ şi fie $w = v \cdot \frac{z-u}{1-\bar{u}z}$. Să se arate că $|w| \le 1$ dacă şi numai dacă $|z| \le 1$.

#0vg

Se evaluează $w\bar{w}$.

■ Fie $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$. Să se arate că dacă:

$$u_1 + u_2 z + \bar{u}_2 \bar{z} = v_1 + v_2 z + \bar{v}_2 \bar{z}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$, atunci $u_1 = u_2$ şi $v_1 = v_2$.

#etd
Se pot atribui valori convenabile lui z.

■ Să se arate că:

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z_1} z_2|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1| \cdot |z_2|},$$

pentru orice $z_1, z_2 \in U = U(0;1)$.

#096
Se ridică la pătrat şi se demodulează.

■ Să se arate că pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:
$|z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| + |z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$ (**Hlawka**).

#m35
Inegalitatea este omogenă. După împărţirea cu z_3 se ridică la pătrat, după care se aplică de trei ori inegalitatea triunghiului.

■ Să se arate că funcţia $d_R : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dată de:

$$d_R(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2}},$$

este o metrică.

#hpy
Se verifică axiomele metricii, pentru inegalitatea triunghiului se ridică la pătrat.

■ Să se determine $\sqrt[7]{-\boldsymbol{i} + 1}$.

#ak8
Avem: $|-\boldsymbol{i} + 1| = \sqrt{2}$ şi $\arg(-\boldsymbol{i} + 1) = \arctan(-1) + 2\pi = 7\pi/4$.
Astfel, cel şapte valori sunt: $\sqrt[14]{2}[\cos(\pi 4 + 2k\pi/7) + \mathbf{i} \sin(\pi/4 + 2k\pi/7)]$, $k \in \{0,1,2, \dots ,6\}$.

■ Să se rezolve ecuaţia: $z^4 + (1 - \boldsymbol{i})z^2 - \boldsymbol{i} = 0$.

#9kq
Se face substituţia $z^2 = u$ şi se determină rădăcinile $u = -1$ şi $u = \boldsymbol{i}$, astfel $z_{1,2} \in \{-\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}\}$ respectiv $z_{3,4} \in \left\{(-1 - \boldsymbol{i})\sqrt{2}/2, (1 + \boldsymbol{i})\sqrt{2}/2\right\}$.

■ Să se calculeze: $\sqrt{-1}$ şi $\sqrt[3]{1 - \boldsymbol{i}}$.

#j89
Se ţine cont că: $\arg(-1) = \pi$, $\arg(1 - \boldsymbol{i}) = 7\pi/4$.

■ Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\omega = \cos\frac{\pi}{4} + \boldsymbol{i} \sin\frac{\pi}{4}$. Să se calculeze: $\arg(\varepsilon^{2007} \cdot \omega^{2008})$.

#itq
Se folosesc proprietăţile:

$$\arg(uv) = \arg u + \arg v \pmod{2\pi}$$
$$\arg(u^n) = n \arg zu \pmod{2\pi}.$$

■ Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi $\varphi \in (0, 2\pi)$. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \cos k\varphi = \frac{1 - a\cos\varphi - a^{n+1}\cos(n+1)\varphi + a^{n+2}\cos n\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}.$$

Să se deducă de aici că:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \cos k\varphi = \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2},$$

pentru $|a| < 1$.

#4pt
Se calculează în două moduri $\sum_{k=0}^{n} [a^k (\cos\varphi + \boldsymbol{i} \sin\varphi)]^k$.

■ Să se stabilească formulele:

1^o $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \cdot \sin^2 x - 5\cos x \cdot \sin^4 x$;

2^o $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$.

1^o Se calculează în două moduri $(\cos x + \boldsymbol{i}\sin x)^5$.

2^o Se evaluează $(\cos \pi/4 + \boldsymbol{i}\sin \pi/4)^n$.

■ Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $z + \frac{1}{z} = 2\sin a$. Să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n},\ n \in \mathbb{N}^*$.

#deb

$$z_1 = \sin a + \boldsymbol{i}\cos a = \cos(\pi/2 - a) + i\sin(\pi/2 - a).$$

■ Fie $p \geq 2$. Să se arate că:

$$2(|z_1|^p + |z_2|^p) \leq |z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p,$$

pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

#3fg

Inegalitatea este omogenă. Se folosesc inegalităţile: $1 + r^p \leq 1 + (p/2)r^2 \leq (1 + r^2)^{p/2}$, cu $0 \leq r \leq 1$.

CUPRINS

Topologia numerelor complexe

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat şi $r > 0$ dat. Se consideră următoarele mulţimi:
$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} \overset{not}{=} \delta U(z_0, r)$, *cercul* de centru z_0 şi rază r.
$U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$, *discul deschis* de centru z_0 şi rază r.
$\overline{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$, *discul închis* de centru z_0 şi rază r.
$U(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, *coroana circulară* de centru z_0 şi raze r_1, r_2 cu $0 < r_1 < r_2$.

Pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, mulţimea:

$$[z_1, z_2] = \{(1 - t)z_1 + tz_2 \mid t \in [0, 1]\}$$

se numeşte *segment de capete* z_1, z_2.

O mulţime nevidă $G \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *deschisă* dacă pentru orice $z_0 \in G$ există $r > 0$ încât $U(z_0, r) \subseteq G$. O mulţime nevidă $F \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *închisă* dacă $\mathbb{C} \setminus F$ este deschisă.
Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. O mulţime nevidă $V \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *vecinătate* pentru α dacă există $r > 0$ încât $U(\alpha, r) \subseteq V$.

Spunem că şirul de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* către $\alpha \in \mathbb{C}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$|z_n - \alpha| < \varepsilon, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \ge n_\varepsilon .$$

Fie şirul de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $z_n = x_n + \boldsymbol{i}y_n,\ x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$z_n \to \alpha \iff x_n \to \mathcal{Re}\,\alpha \wedge y_n \to \mathcal{Im}\,\alpha$$

#uuh

Pentru ''$\Rightarrow$'' se utilizează inegalităţile elementare $|x_n| - \mathcal{Re}\,\alpha \le |z_n - \alpha|$ şi $|y_n - \mathcal{Im}\,\alpha| \le |z_n - \alpha|$, iar pentru ''$\Leftarrow$'' rezultă direct din exprimarea modulului complex.

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ fixat. Şirul de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termenul general dat de $z_n = (1 + \alpha/n)^n$ este convergent. Limita sa se va nota $\mathbb{e}^\alpha$.

#t27

Fie $\alpha = x + \boldsymbol{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}$. Presupunem $\alpha \ne 0$. Avem $|z|^2 = [(1 + x/n)^2 + y^2/n^2]^2$, de unde $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = e^x$.
$\arg z_n = n \arctan \frac{y/n}{1 + x/n}\ (mod\ 2\pi)$, de unde $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg z_n = y\ \ (mod\ 2\pi)$.
Astfel: $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = e^x(\cos y + \boldsymbol{i}\sin y)$.
Pentru $\alpha = 0$ avem şirul constant, evident convergent şi anume $z_n \to 1 = e^0$.

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ nevidă. O funcţie $f: D \to \mathbb{C}$ se numeşte *funcţie complexă*.
Fie acum un $\alpha \in \mathbb{C}$ punct de acumulare pentru D. Spunem că funcţia f are *limită* în punctul α egală cu $l \in \mathbb{C}$ dacă pentru orice şir de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $z_n \in D,\ z_n \ne \alpha,\ z_n \to \alpha$ avem $f(z_n) \to l$.
Dacă ∞ este punct de acumulare pentru D, spunem că funcţia *are limită* la ∞ egală cu l_∞ dacă pentru orice şir de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $z_n \in D,\ z_n \to \infty$ avem $f(z_n) \to \infty$.
Vom nota $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = l$, respectiv $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \overset{not}{=} f(\infty) = l_\infty$.

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ nevidă şi $\alpha \in D$. Spunem că funcţia $f: D \to \mathbb{C}$ este *continuă* în punctul α dacă pentru orice şir de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $z_n \in D$, din $z_n \to \alpha$ să avem $f(z_n) \to f(\alpha)$.

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ nevidă, $\alpha \in D$ şi funcţia $f: D \to \mathbb{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1^o f este continuă în α;
2^o pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $z \in D$ cu $|z - \alpha| < \delta$ să avem $|f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$;

3^o pentru orice vecinătate V a lui $f(\alpha)$ există U o vecinătate a lui α încât $f(z) \in V$, pentru orice $z \in U$.

#o64

Demonstraţia se face ca la funcţii reale.

Topologia numerelor complexe. Exerciţii

■ Să se calculeze limitele următoarelor şiruri complexe:

1^o $(z_n)_{n\in\mathbb{N}},\ z_n = \sin n/n + \boldsymbol{i}(n+1)^{1/n}$;

2^o $(z_n)_{n\in\mathbb{N}},\ z_n = z_0^n$, unde $|z_0| \neq 1$;

3^o $z_n = \sin n/n + \boldsymbol{i}(n+1)^{1/n}$;

4^o $z_n = n\ln(1+1/n) + \boldsymbol{i}(n+1)/n$;

5^o $z_n = \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{i}/2)^k$;

6^o $z_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos kx + \boldsymbol{i}\sin kx)/2^k$, $x \in \mathbb{R}$;

7^o $z_n = \frac{1}{2^n} + \boldsymbol{i}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

8^o $z_n = \left(1+\frac{\pi\boldsymbol{i}}{2n}\right)^n$.

#a0k

1^o Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{Re}\, z_n = 0$ iar $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{Im}\, z_n = 1$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \boldsymbol{i}$.

2^o Dacă $|z_0| < 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Dacă $|z_0| > 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

3^o Limita este $\boldsymbol{i}$;

4^o $1+\boldsymbol{i}$;

5^o $\boldsymbol{i}$;

6^o $\frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}$;

7^o $\boldsymbol{i}\mathbb{e}$;

8^o $\boldsymbol{i}$.

■ Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ pentru:

1^o $z_n = \frac{2n}{n+1}\,[\cos\theta_n\pi + \boldsymbol{i}\sin\theta_n\pi]$, unde $\theta_n = \frac{n+1}{2n+1}$;

2^o $z_n = \sqrt[n]{n}[\cos(\pi n) + \boldsymbol{i}\sin(\pi n)]$;

3^o $z_n = \left(\frac{1+\boldsymbol{i}}{2}\right)^n$.

#3kk

1^o $2\boldsymbol{i}$; 2^o $2\boldsymbol{i}$; 3^o 0.

■ Folosind criteriul $\varepsilon - \delta$, să se arate continuitatea funcţiei $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z) = z^2 + \bar{z}$ în punctul $\alpha \in \mathbb{C}$.

#jyl

Se determină δ în funcţie de ε încât din $|z-\alpha| < \delta$ să avem $|z^2 - \alpha^2 + \bar{z} - \bar{\alpha}| < \varepsilon$.

■ Să se arate că funcţia $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definită prin:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{\mathbb{e}\,\mathcal{Re}\, z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în punctul $z_0 = 0$.

#7dr

Se determină $u = u(x,y) = \mathcal{Re}\, f$ şi $v = v(x,y) = \mathcal{Im}\, f$;

Observaţie. Fie funcţia $f: D \to \mathbb{C}$. Se notează $u = \mathcal{Re}\, f$ şi $v = \mathcal{Im}\, f$ încât $u, v: G \to \mathbb{R},\ G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x + \boldsymbol{i}y \in D\}$ şi $f = u + \boldsymbol{i}v$.

■ B6WsWT6r Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continuă în $z_0 = 0$ cu $f(z_0) = 0$. Să se arate că:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \frac{|z - z_0|}{z - z_0} = 0.$$

■ Să se studieze continuitatea funcţiilor de mai jos pe întreg domeniul de definiţie:

1^o $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{Re}^2 z}{\bar{z}}\,, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$

2^o $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{Re}\, z}{\bar{z}}\,, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$

#mus

1^o Pentru $z = x + \boldsymbol{i}y,\ z \neq 0$, se găseşte $u = u(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$. Funcţia u este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Se pune problema continuităţii în punctul $(0,0)$. Avem $|u(x,y)| = |x| x^2/(x^2 + y^2)| \leq |x|$, pentru $(x, y) \neq (0,0)$, de unde se obţine continuitatea lui u. Analog se procedează pentru $v = v(x, y) = x^2 y/(x^2 + y^2)$.

2^o Pentru $z = x + \boldsymbol{i}y\,,\ z \neq 0$ se găseşte $u = u(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$. Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Se pune problema continuităţii în punctul $(0,0)$. Avem $u(x, y) = x^2(x^2 + y^2)$. Vom căuta un şir $(x_n, y_n) \to (0,0)$ încât $(u(x_n, y_n)_n$ să fie divergent de unde se obţine discontinuitatea lui u. Definim $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$ pentru n par şi $(x_n, y_n) = (1/n, 2/n)$ pentru n impar. Însă $u(x_n, y_n)\ = 1/2$ pentru n par şi $u(x_n, y_n)\ = 1/5$ pentru n impar.
Analog se poate studia continuitatea lui v.

Funcţii complexe elementare

■ Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ cu $a_n \neq 0$. Aplicaţia $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C},$$

se numeşte *funcţie polinomială* (de grad n).

Să se demonstreze că $\lim_{z \to \alpha} P(z) = P(\alpha)$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$ şi că $\lim_{z \to \infty} P(z) = P(\infty) = \infty$.

#

■ Fie funcţiile polinomiale $P, Q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$.
Aplicaţia $R: \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ dată de:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus D,$$

se numeşte *funcţie raţională*.

Fie α un punct de acumulare pentru $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$. Să se arate că $\lim_{z \to \alpha} R(z) = R(\alpha)$.
Dacă $grad\ P = m,\ grad\ Q = n$, atunci:

$$R(\infty) = \begin{cases} \infty & dacă\ \ m > n \\ 0 & dacă\ m < n \\ \in \mathbb{C}^* & pentru\ \ m = n \end{cases}.$$

■ Aplicaţia $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de:

$$\exp z = \mathbb{e}^z, \qquad z \in \mathbb{C}$$

se numeşte *funcţie exponenţială*.

Să se demonstreze că $\lim_{z \to \alpha} \mathbb{e}^z = \mathbb{e}^\alpha$ şi că nu există $\lim_{z \to \infty} \mathbb{e}^z$.

Pentru demonstrarea primei afirmaţii se ţine cont de teorema:
Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ fixat. Şirul de numere complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general dat de $z_n = (1 + \alpha/n)^n$ este convergent. Limita sa se va nota $\mathbb{e}^\alpha$.
Întrucât funcţia exponenţială este periodică, $\exp(z + 2\pi \boldsymbol{i}) = \exp z$, nu există $\lim_{z \to \infty} \mathbb{e}^z$.

■ Se definesc *funcţiile trigonometrice complexe*:

1^o *Funcţia sinus*: $sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\sin z = \frac{\mathbb{e}^{\boldsymbol{i}z} - \mathbb{e}^{-\boldsymbol{i}z}}{2}$$

2^o *Funcţia cosinus*: $cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{\mathbb{e}^{\boldsymbol{i}z} + \mathbb{e}^{-\boldsymbol{i}z}}{2}$$

Să se demonstreze că funcţiile trigonometrice complexe astfel definite sunt prelungiri ale funcţiilor omonime reale.

Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem: $\mathbb{e}^{\boldsymbol{i}x} = \cos x + \boldsymbol{i} \sin x$ şi $\mathbb{e}^{-\boldsymbol{i}x} = \cos x - \boldsymbol{i} \sin x$.
Adunând şi scăzând cele două relaţii, se obţin pe rând:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}.$$

■ Să se demonstreze că următoarele relaţii sunt valabile pe întreaga mulţime $\mathbb{C}$.

1^o $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (*formula fundamentală a trigonometriei*);

2^o $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

3^o $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

4^o $\cos(\pi 2 - z) = \sin z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

■ Aplicaţia $\tan: \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$, dată de:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

se numeşte *funcţia tangentă*.

Se definesc şi *funcţiile hiperbolice* prin extinderea celor reale:

1^o *Funcţia sinus hiperbolic*: $sh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

2^o *Funcţia cosinus hiperbolic*: $ch : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

■ Fie $z \in \mathbb{C}^*$. Să se rezolve ecuaţia: $e^w = z$.

Dacă $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$, iar $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, se obţine sistemul:

$$\begin{cases} e^u \cos v = x \\ e^u \sin v = y \end{cases}$$

Pentru $v \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$, prin împărţirea relaţiilor, obţinem $\tan v = y/x$, de unde $v = \arctan(y/x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Astfel $v = \arg z + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pe de altă parte $e^{2u} = x^2 + y^2$, de unde $e^u = |z|$ sau $u = \ln|z|$.

Cazurile particulare $x = 0, y > 0$ şi $x = 0, y < 0$ duc la $v = \pi/2$ respectiv $v = 3\pi/2$.

Astfel s-a obţinut mulţimea soluţiilor:

$$\{\ln|z| + \arg z + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

■ O funcţie $F: D \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ se numeşte *funcţie complexă multivocă* dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ şi $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ este familia părţilor (submulţimilor) lui $\mathbb{C}$.

Aplicaţia $Ln : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dată de:

$$Ln\,(z) = \{\ln|z| + i \arg z + k\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z}\},$$

se numeşte *funcţie logaritmică*.

Aplicaţia $\ln: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ dată de $\ln z = \ln|z| + i \arg z$,

se numeşte *ramura principală* a funcţiei Ln (pentru $k = 0$).

Să se calculeze:

1^o $Ln\,(-1 + i\sqrt{3})$;

2^o $(-1)^{-1}$;

3^o $\sin(\pi + i \ln 7)$.

1^o Avem: $|(-1 + i\sqrt{3}| = 2$ şi $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = 2\pi/3$, astfel că:

$$Ln\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + i\,(2\pi 33 + k\pi), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Mai departe $\ln i = i \cdot \pi/2$, $\ln(-1) = i \cdot \pi$, $\ln\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + i \cdot \pi/3$.

2^o $(-1)^{-1} = e^{Ln(-1)^{-1}} = e^{-1\,Ln\,(-1)}$. Dar $Ln\,(-1) = \ln 1 + i\,(\pi + k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$.

De aici $(-1)^{-1} = e^{-i(\pi + k\pi)} = \cos(\pi + k\,\pi) - i \sin(\pi + k\,\pi) = (-1)^{k+1} = \{-1\,;\,+1\}$.

3^o $\sin(\pi + i \ln 7) = 1/(2i)\left[e^{i\pi} e^{-\ln 7} - e^{-i\pi} e^{\ln 7}\right] = 1/(2i)\left(-\frac{1}{7} + 7\right) = -24i/7$.

■ Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. Aplicaţia $z \in \mathbb{C}^* \mapsto z^\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dată de:

$$z^\alpha = e^{\alpha\, Ln\, z},$$

se numeşte *funcția putere*.

■ Fie $z \in \mathbb{C}$ fixat. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin w = z\,.$$

Se obţine $e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$. Notăm $e^{iw} = u$ şi astfel din ecuaţia de gradul al doilea găsim rădăcinile:

$u_1 = iz - \sqrt{1 - z^2}$, respectiv $u_2 = iz + \sqrt{1 - z^2}$.

De aici $iw = Ln\,(iz - \sqrt{1 - z^2})$ sau $w = -i\,Ln\,(iz - \sqrt{1 - z^2})$. Cum $u_1 u_2 = -1$ avem $w_1 + w_2 = i\pi$.

Astfel s-a obţinut mulţimea soluţiilor: $-i\,Ln\,(iz - \sqrt{1 - z^2})$.

■ Aplicaţia $Arcsin : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dată de:

$$Arcsin\ z = -i\,Ln\left(iz - \sqrt{1 - z^2}\right),$$

se numeşte *funcția arcsinus*.

Funcţia $J\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $J(z) = \frac{1}{2}(z + 1\,/\,z)$ se numeşte *funcţia lui* ***Jukowski***. Prin extindere se defineşte $J_\infty\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$,

$$J_\infty(z) = \begin{cases} J(z)\ pentru\ \ z \in \mathbb{C}^* \\ \infty\ \ pentru\ z \in \{0, \infty\} \end{cases}$$

Funcţia

$$K\colon G \to \mathbb{C}^*, G \subseteq \mathbb{C} \setminus \left\{\mathbb{e}^{-i\theta}\right\}, \qquad \theta \in \mathbb{R}, \qquad K(z) = \frac{z}{(1 - \mathbb{e}^{i\theta} z)^2}$$

se numeşte *funcţia lui* ***Koebe***.

Funcţii complexe elementare. Exerciţii

■ Să se calculeze $Ln\,(1+\boldsymbol{i})$.

$Ln\,(1+\boldsymbol{i}) = \ln 2/2\ + \boldsymbol{i}(\pi/4 + k\pi);\ \ k \in \mathbb{Z}$.

■ Să se rezolve ecuaţiile:

1^o $z^6 + (\boldsymbol{i}+1)z^3 + \boldsymbol{i} = 0$;

2^o $e^{2z^4} + e^{z^4} = -1 + \boldsymbol{i}$;

3^o $\cos^2 z^3 = -1$.

1^o $z^3 = u$; $u_1 = \boldsymbol{i}$;

2^o $e^{z^4} = u$; $z^4 = Ln\,u$;

3^o $\cos z^3 = -\boldsymbol{i}\,, \cos z^3 = \boldsymbol{i}$; $z^3 = Arccos\,(-\boldsymbol{i})$, $z^3 = Arccos\,\boldsymbol{i}$.

■ Fie $U = U(0,1)$. Să se arate că funcţia $d_h: U \times U \to \mathbb{R}$, dată de:

$$d_h(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|\right) - \ln\left(1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \bar{z}_2}\right|\right)\right],$$

este o metrică (*metrica hiperbolică*).

Se poate folosi monotonia funcţiei: $r: (0,1) \to \mathbb{R}\,,\ r(x) = (1+x)/(1-x)$.

■ Să se arate că: $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Fie $z_n = x_n + \boldsymbol{i} y_n\,,\ x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Se calculează:

$$\lim_{(x_n, y_n) \to (0,0)} \frac{\sin(x_n + \boldsymbol{i} y_n)}{x_n + \boldsymbol{i} y_n}\ .$$

CUPRINS	
Calcul real	Preliminarii | Calcul diferenţial | Calcul integral
Analiză complexă	
Calcul multivariabil	Spaţiul $\mathbb{R}^n$ |Limită a unei funcţii |Continuitate | Derivabilitate |Integrală | Spaţii topologice
Analiză matematică abstractă	Spaţii topologice
Anexe	

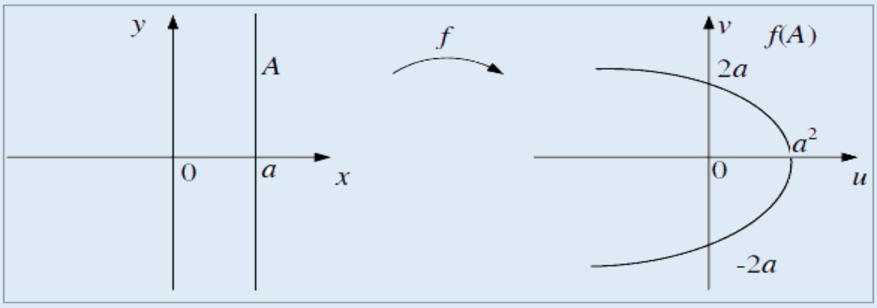
Transformări de coordonate prin funcţii complexe

■ Se consideră mulţimile: $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{Re}\, z = a\},\ B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{Im}\, z = b\}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$
Să se determine imaginea acestor mulţimi prin funcţia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^2$.

Pentru $z = x + \boldsymbol{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ avem: $w = f(z) = x^2 - y^2 + 2xy\boldsymbol{i} = u + \boldsymbol{i}v$.
Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in A$ avem $x = a$ de unde $u = a^2 - y^2$ şi $v = 2ay$. Eliminăm variabila y. Pentru $a \neq 0$ avem $y = v/(2a)$ de unde găsim curba:

$$u = a^2 - v^2/(4a^2).$$

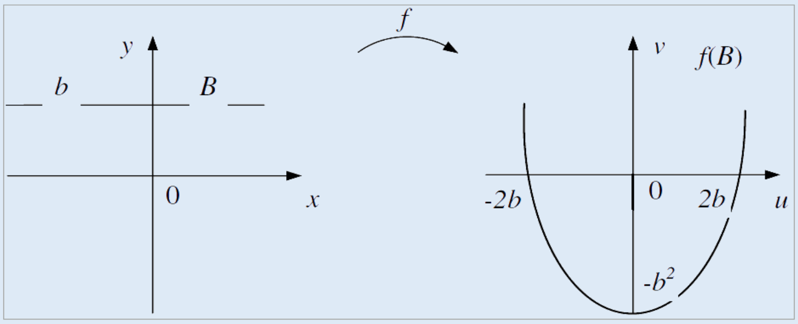
Aceasta reprezintă o parabolă.
Dacă $a = 0$ atunci $v = 0$ şi $u = -y^2,\ y \in \mathbb{R}$.



Pentru $z \in B$ avem $y = b$ de unde $u = x^2 - b^2$ şi $v = 2xb$. Se elimină variabila x. Pentru $b \neq 0$ avem $x = v/(2b)$ de unde găsim curba (locul geometric dat de perechea (u, v)):

$$u = v^2/(4b^2) - b^2$$

reprezentând o parabolă. Dacă $b = 0$ atunci $v = 0$ şi $u = x^2,\ x \in \mathbb{R}$.



Observaţie. Dreptele reprezentate prin mulţimile A şi B sunt perpendiculare. Se poate observa uşor că tangentele în punctul de intersecţie a celor două parabole, $f(A), f(B)$ sunt tangente.
O funcţie care păstrează unghiurile dintre cele două curbe se numeşte conformă.

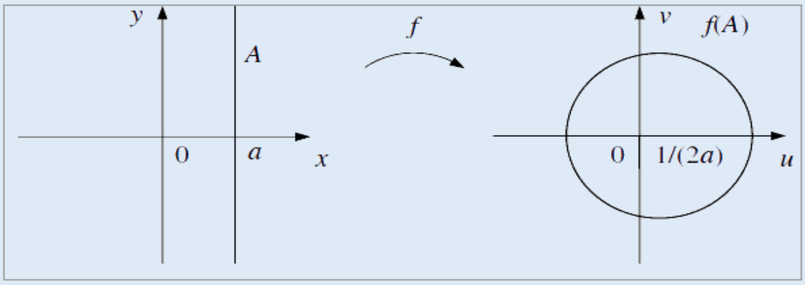
■ Să se determine imaginile mulţimilor: $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{Re}\, z = a\},\ B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{Im}\, z = b\}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, prin funcţia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = 1/z$.

Pentru $z = x + \boldsymbol{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ avem: $w = f(z) = x/(x^2 + y^2) - y\boldsymbol{i}/(x^2 + y^2) = u + \boldsymbol{i}v,\ u, v \in \mathbb{R}$
cu $u = \mathcal{Re}\, f = x/(x^2 + y^2)$ iar $v = \mathcal{Im}\, f = -y/(x^2 + y^2)$.

Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in A$ avem $x = a$ de unde $u = a/(a^2 + y^2)$ şi $v = -y/(a^2 + y^2)$. Eliminăm variabila y. Pentru $a \neq 0$ avem $v/u = -y/a$ de unde găsim curba:

$$u^2 + v^2 = u/a$$

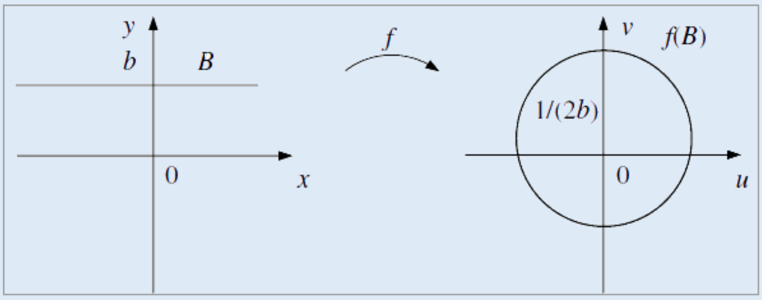
reprezentând cercul de centru $(1/(2a), 0)$ şi rază $1/(2a)$. Dacă $a = 0$ atunci $u = 0$ şi $v = -1/y,\ y \in \mathbb{R}^*$



Analog pentru mulţimea B. Fie $b \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in B$ avem $y = b$ de unde $u = x/(x^2 + b^2)$ şi $v = -b/(x^2 + y^2)$. Pentru $b \neq 0$ găsim $u/v = -x/b$. Eliminăm variabila x şi avem curba:

$$u^2 + v^2 = \frac{v}{b}$$

reprezentând cercul de centru $(0,\ 1/(2b))$ şi rază $1/(2b)$. Dacă $b = 0$ atunci $v = 0$ şi $u = -1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^*$.

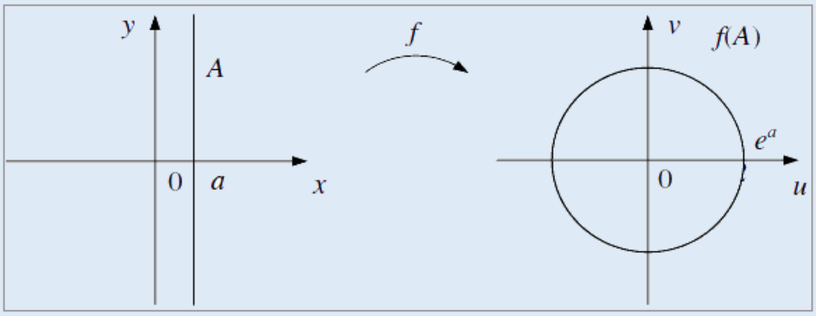


■ Să se determine imaginile mulţimilor: $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{Re}\, z = a\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{Im}\, z = b\}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, prin funcţia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = e^z$.

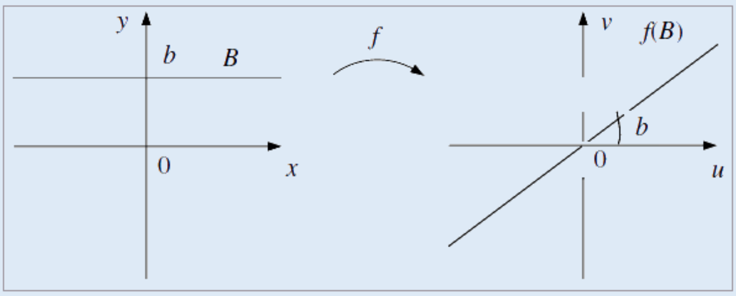
Pentru $z = x + \boldsymbol{i}y\,,\ x, y \in \mathbb{R}$ avem: $w = f(z) = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = u + \boldsymbol{i}v\,,\ u, v \in \mathbb{R}$,
cu $u = \mathcal{Re}\, f = e^x \cos y$ iar $v = \mathcal{Im}\, f = e^x \sin y$.
Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in A$ avem $x = a$ de unde $u = e^a \cos y$ şi $v = e^a \sin y$.
Eliminăm variabila y de unde găsim curba:

$$u^2 + v^2 = e^{2a},$$

reprezentând cercul cu centru în origine şi rază e^a.



Analog pentru mulţimea B. Fie $b \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in B$ avem $y = b$ de unde $u = e^x \cos b$ şi $v = e^x \sin b$. Eliminăm variabila x.
Pentru $b \neq \pi/2 + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ avem $v/u = \tan b$ reprezentând drepte care trec prin origine având panta b.
Dacă $b \in \{\pi/2 + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$ atunci $u = 0$ şi $v = e^x, x \in \mathbb{R}$, pentru k par, respectiv $v = -e^x,\ x \in \mathbb{R}$, pentru k impar.



Transformări de coordonate prin funcţii complexe. Exerciţii

■ Să se determine imaginea mulţimii $A = \{z \in \mathbb{C}\,,\ \mathcal{Im}\, z = 1\}$ prin funcţia $f(z) = z^2 + z + 1$.

Imagine este o parabolă.

■ Să se determine imaginea mulţimii $B = \{z \in \mathbb{C}\,,\ \mathcal{Re}\, z = 1\}$ prin funcţia $f(z) = z^2 - z$.

Parabolă.

■ Să se determine imaginea funcţiei $w = f(z) = z^2$ prin mulţimile:
$C = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| = r_0 > 0\},\ r_0$ fixat şi
$D = \{z \in \mathbb{C}:\ \arg z = \alpha_0\},\ \alpha_0$ fixat.

Imaginile sunt un cerc, respectiv o dreaptă.

■ Să se determine imaginea funcţiei $w = f(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0$ prin mulţimile:
$C = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| = r_0 > 0\},\ r_0$ fixat şi
$D = \{z \in \mathbb{C}:\ \arg z = \alpha_0\},\ \alpha_0$ fixat.

■ Să se determine imaginea mulţimii $S = [0, \boldsymbol{i}]$ prin funcţia $f(z) = \mathrm{e}^{z^2}$.

■ Se consideră funcţia $J: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,\ J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Dacă $w = J(z)$ să se arate că $\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. Folosind scrierea în formă trigonometrică a lui z, să se determine $\mathcal{Re}\, J$ şi $\mathcal{Im}\, J$. Să se determine apoi imaginea mulţimilor:

$a)$	$\partial U\ (0,1)$;	$b)$	$\{z \in \mathbb{C}:\ \mathcal{Re}\, z = 0,\ 1 \leq \mathcal{Im}\, z < \infty\}$;	$c)$	$\partial U\ (0, r_0),\ r_0$ fixat;
$d)$	$U(0,1)$;	$e)$	$\{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \mathcal{Re}\, z \leq 1,\ \mathcal{Im}\, z = 0\}$;	$f)$	$\{z \in \mathbb{C}:\ \arg z = \theta_0\},\ \theta_0 > 0$, fixat.

Funcţii omografice

■ Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $c \neq 0$ şi $ad - bc \neq 0$. Aplicaţia $h: \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C}\}$ dată de:

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + b}\,, \qquad z \neq -d/c,$$

se numeşte *funcţie omografică*. Punctul $-{}^{d}/_{c}$ se numeşte *pol*.

Fie $A, C \in \mathbb{R}$ şi $b \in \mathbb{C}$. Mulţimea punctelor $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$Az\bar{z} + Bz + B\bar{z} + C = 0\,,$$

se numeşte *cerc în sens larg*.

Funcţiile omografice transformă cercurile în sens larg în cercuri în sens larg.

Fie $w = h(z)$ cu $Az\bar{z} + Bz + B\bar{z} + C = 0$. Prin înlocuirea lui $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ se obţine:
$A_1 z\bar{z} + B_1 z + B_1 \bar{z} + C_1 = 0$, cu $A_1, C_1 \in \mathbb{R}$ şi $B_1 \in \mathbb{C}$.
Mai exact, infinitul nu se poate afla pe niciun cerc propriu-zis. Cum $h(z_0) = \infty$ ($z_0 = -d/c$ fiind polul) avem un criteriu clar de stabilire a imaginii unui cerc în sens larg. Dacă acesta conţine polul, imaginea sa va fi o dreaptă, în caz contrar, va fi un cerc propriu-zis. Există situaţii când se cere imaginea unui arc de cerc, a unei semirepte sau a unui segment. În toate aceste situaţii se va considera cercul de suport, respectiv dreapta de suport pentru a aplica criteriul mai sus menţionat.

Observaţii.

1^o Funcţia omografică se poate extinde astfel: $\tilde{h}: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, prin:

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{pentru } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty & \text{pentru } z = -d/c\} \\ {}^{a}/_{c} & \text{pentru } z = \infty \end{cases}$$

2^o Dacă $A = 0$ cercul în sens larg se transformă într-o dreaptă (cerc cu rază infinită) iar pentru $A \neq 0$ cercul în sens larg se transformă într-un cerc propriu-zis (cerc cu rază finită).

■ Funcţiile omografice pentru care $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ transformă axa reală în axa reală.
Reciproc, dacă funcţiile omografice transformă axa reală în axa reală, atunci $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ atunci evident $h(z) \in \mathbb{R}$ pentru orice $z \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$.
Reciproc, se impune ca $h(x) = \overline{h(x)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

■ Funcţiile omografice pentru care $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $ad - bc > 0$ transformă semiplanul superior în semiplanul superior.
Reciproc, dacă funcţiile omografice transformă semiplanul superior în semiplanul superior, atunci $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $ad - bc > 0$.

Fie $z = x + \boldsymbol{i}y$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{Im}\, z = y > 0$. Avem $\mathcal{Im}\, h(z) = [ay(cx + d) - cy(ax + b)]/[(cx + d)^2 + y^2] > 0$.
Reciproc, folosind propoziţia anterioară şi dacă se impune $\mathcal{Im}\, h(\boldsymbol{i}) > 0$ găsim $ad - bc > 0$.

■ Funcţiile omografice de forma

$$h(z) = e^{\boldsymbol{i}\theta} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}, |z_0| < 1,$$

transformă discul unitate în discul unitate.
Reciproc, dacă funcţiile omografice transformă discul unitate în discul unitate, atunci sunt de forma indicată anterior.

Fie $w = h(z) = e^{\boldsymbol{i}\theta} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$, $\theta \in \mathbb{R}, |z_0| < 1$. Este uşor de arătat că din $|z_0| \leq 1$ avem $|w| \leq 1$.
Reciproc, fie $w = h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Pentru început impunem ca din $z\bar{z} = 1$ să avem $w\bar{w} = 1$. Găsim:

$$|a|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} + |b|^2 = |c|^2 + c\bar{d}z + \bar{c}d\bar{z} + |d|^2, \text{ pentru orice } z \text{ cu } |z| = 1.$$

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0 \\ a\bar{b} = c\bar{d}. \end{cases}$$

Dacă $a = 0$ atunci $d = 0$ şi $|b| = |c|$, astfel că $w = \frac{b}{cz}$ de unde $|w| = \frac{1}{|z|}$ ceea ce duce la contradicţie, întrucât $|z| < 1$ implică $|w| > 1$. Rămâne $a \neq 0$ şi $d \neq 0$. Avem $\frac{c}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{d}}$, valoare comună ce o vom nota $\bar{\lambda}$. Atunci $c = a\bar{\lambda}$ şi $b = \lambda d$. Înlocuind în prima egalitate a sistemului găsim $(1-|\lambda|^2)(|a|^2-|d|^2)=0$. Dacă $|\lambda|=1$ aică $\bar{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$, atunci forma funcţiei $w=\frac{az+\lambda d}{az\bar{\lambda}+d}=\lambda$ duce la contradicţie (am avea $|w|=|\lambda|=1$, pentru orice $|z|\leq 1$). Rămâne $|\lambda|\neq 1$ şi $|a|=|d|$. Există atunci $\theta\in\mathbb{R}$ încât $\frac{a}{d}=e^{i\theta}$. Din bijectivitatea funcţiei h există z_0 cu $|z_0|<1$ încât $w=h(z_0)=0$. Evident $z_0=-\lambda\frac{d}{a}$. Am găsit astfel forma funcţiei:

$$h(z)=\frac{a}{d}\frac{z+\lambda\frac{d}{a}}{\frac{a}{d}\bar{\lambda}z+1}=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$$

■ e46tKuXA Funcţiile omografice de forma:

$$h(z)=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0},\qquad \alpha\in\mathbb{R},\qquad \mathcal{Im}\,z_0>0\,,$$

transformă semiplanul superior în discul unitate.
Reciproc, dacă funcţiilor omografice transformă semiplanul superior în discul unitate, atunci sunt de forma indicată anterior.

Fie $w=h(z)=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathcal{Im}\,z_0>0$. Este uşor de arătat că din $\mathcal{Im}\,z\geq 0$ avem $|w|\leq 1$.
Reciproc, fie $w=h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. Pentru început impunem ca din $\mathcal{Im}\,z=0$ să avem $w\bar{w}=1$. Obţinem:

$$|a|^2x^2+a\bar{b}x+\bar{a}bx+|b|^2=|c|^2x^2+c\bar{d}x+\bar{c}dx+|d|^2, \text{ pentru orice } x=\mathcal{Re}\,z.$$

Se obţine sistemul:

$$\begin{cases}|a|=|c|\\ |b|=|d|\\ \mathcal{Re}\,(a\bar{b})=\mathcal{Re}\,(c\bar{d})\end{cases}$$

Dacă $a=0$ atunci $c=0$, imposibil. Din bijctivitatea funcţiei h există z_0 cu $\mathcal{Im}\,z_0>0$ încât $w=h(z_0)$. Evident $z_0=-\frac{b}{a}$, $a\neq 0$. Mai mult există u_0 cu $\mathcal{Im}\,u_0<0$ încât $w=h(u_0)=\infty$. Evident $u_0=-\frac{d}{c}$. Din prima egalitate a sistemului deducem existenţa unui $\alpha\in\mathbb{R}$ încât $\frac{a}{c}=e^{i\alpha}$. Am găsit astfel forma funcţiei:

$$h(z)=\frac{a}{c}\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-u_0}.$$

Ramâne de arătat că $u_0=\bar{z}_0$. Din a doua egalitate a sistemului avem $|z_0|=|u_0|$. Condiţia $|w|\leq 1$ se scrie $|z-z_0|\leq|z-u_0|$ pentru orice z cu $\mathcal{Im}\,z\geq 0$. Punând $z=1$ şi apoi $z=-1$ se deduce $\mathcal{Re}\,z_0\leq\mathcal{Re}\,u_0$, respectiv $\mathcal{Re}\,z_0\geq\mathcal{Re}\,u_0$.

■ Fie $z_1,z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}$ distincte. Valoarea

$$\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}:\frac{z_3-z_2}{z_3-z_4}\in\mathbb{C}$$

se numeşte *biraport* şi se notează (z_1,z_2,z_3,z_4).

Observaţie.
1^o Se observă că prin permutări circulare avem $(z_4,z_1,z_2,z_3,)=(z_1,z_2,z_3,z_4)^{-1}$ şi $(z_3,z_4,z_1,z_2)=(z_1,z_2,z_3,z_4)$.
2^o Biraportul se poate defini şi dacă unul dintre puncte este ∞. Spre exemplu, dacă $z_1=\infty$ atunci fracţie în care apare z_1 se consideră $\lim\limits_{z\to z_1}\frac{z-z_2}{z-z_4}=1$. Astfel $(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}$.

Funcţiile omografice conservă biraportul.

Se verifică prin calcul că $(z_1,z_2,z_3,z_4)=\big(h(z_1),h(z_2),h(z_3),h(z_4)\big)$.

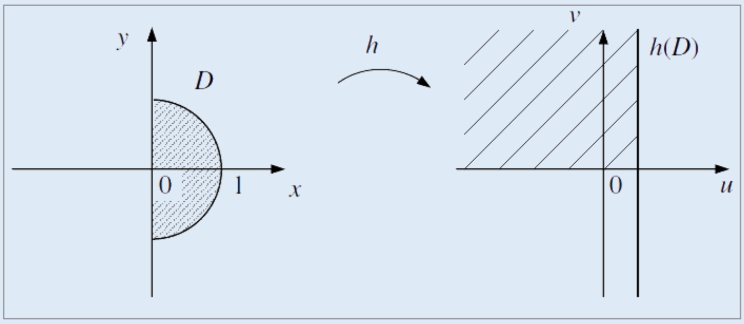
Funcţii omografice. Exerciţii

■ Fie $h(z)=\frac{z+\boldsymbol{i}}{z-1}$. Să se determine imaginea axelor prin h.

Polul transformării este $z_0=1$. Deoarece polul se află pe axa absciselor, acesta se va transforma într-o dreaptă. Alegem *două* valori, spre exemplu $z_1=0$ şi $z_2=2$. Avem $h(0)=-\boldsymbol{i}$ şi $h(2)=2+\boldsymbol{i}$. Se putea alege şi $z_\infty=\infty$ cu $h(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}h(z)=1$.
Imaginea axei absciselor prin h va fi atunci dreapta care trece prin punctele $A(-1)$ şi $B(2+\boldsymbol{i})$. Evident $1\in AB$.
Deoarece polul **nu** se află pe axa coordonatelor, acesta se va transforma într-un cerc.
Alegem *trei* valori $z_1=0,\ z_2'=\boldsymbol{i}$ şi $z_3'=-\boldsymbol{i}$. Avem $h(0)=-\boldsymbol{i}$, $h(\boldsymbol{i})=1-\boldsymbol{i}$ şi $h(-\boldsymbol{i})=0$. Se putea alege şi $z_\infty=\infty$ cu $h(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}h(z)=1$. Imaginea axei coordonatelor prin h va fi atunci cercul care trece prin punctele $A'(-\boldsymbol{i}), B'(1-\boldsymbol{i})$ şi $O(0)$. Evident $1\in A'B'O$.

■ Fie $D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<1,\mathcal{R}e\ z>0\}$ şi $h(z)=\frac{z}{z-\boldsymbol{i}}$. Să se determine $h(D)$.

Frontiera domeniului D este compusă din $F_1=\{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|=1,\mathcal{R}e\ z\geq 0\}$ (semicercul unitate din cadranele I şi IV) şi $F_2=\{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|<1,\mathcal{R}e\ z=0\}$ (segmentul de pe axa ordonatelor, adică $]-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}[$). Altfel scris, $\partial D=F_1\cup F_2$.
Imaginea lui D prin h va fi atunci reuniunea imaginilor prin h a lui F_1 şi F_2.
Polul transformării h (rădăcina numitorului) este $z_0=\boldsymbol{i}$. Polul se află atât pe suportul (cercul unitate) lui F_1 cât şi pe suportul (axa ordonatelor) segmentului F_2 astfel că $\infty\in h(F_1)$ şi $\infty\in h(F_2)$. Ambele mulţimi de suport se vor transforma atunci în drepte.
Ramâne să determinăm ce porţiuni din aceste drepte reprezintă $h(F_1)$ şi $h(F_2)$. Pentru aceasta calculăm nişte valori într-un tabel.
Avem $-\boldsymbol{i},1,\boldsymbol{i}\in F_1$ şi $h(-\boldsymbol{i}),h(1),h(\boldsymbol{i})\in h(F_1)$. Apoi $0,\boldsymbol{i}/2\in F_2$ şi $h(0),h(\boldsymbol{i}/2)\in h(F_2)$. Reprezentând toate aceste valori, vom găsi $h(\partial D)$.



Rămâne să stabilim care dintre cele două domenii este $h(D)$ folosind proprietatea transformărilor omografice de *conservarea orientării domeniilor*.
Spunem că un domeniu are *orientare pozitivă* dacă prin parcurgerea frontierei sale în sens trigonometric, interiorul său este în partea stângă.
Un domeniu orientat pozitiv se transformă omografic într-un domeniu orientat pozitiv.

■ Să se determine transformările omografice $w=h(z)$ pentru care:

$$\mathcal{R}e\ z<0\ \overset{h}{\mapsto}|w-\boldsymbol{i}|<2\,.$$

Se va folosi e46tKuXA . Prin substituţia $z_1=-\boldsymbol{i}z$ punctele pentru care $\mathcal{R}e\ z<0$ se transformă în $\mathcal{I}m\ z_1>0$.
Prin transformarea $w_1=\mathbb{e}^{i\alpha}\frac{z_1-z_0}{z_1-\overline{z_0}}$ cu $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\mathcal{I}m\ z_0>0$ se obţine $|w_1|<1$. Prin substituţia $w_1=(w_2-\boldsymbol{i})/2$ punctele pentru care $|w_1|<1$ se transformă în $|w_2-\boldsymbol{i}|<2$. Acum se exprimă w ca funcţie de z şi se obţine

$$w_2=2w_1+\boldsymbol{i}=2\mathbb{e}^{i\alpha}\frac{-\boldsymbol{i}z-z_0}{-\boldsymbol{i}z-\overline{z_0}}+\boldsymbol{i}=2\mathbb{e}^{i\alpha}\frac{\boldsymbol{i}z+z_0}{\boldsymbol{i}z-\overline{z_0}}+\boldsymbol{i},\ \text{cu } \alpha\in\mathbb{R} \text{ şi } \mathcal{I}m\ z_0>0.$$

■ Fie $D=\{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|<1,\ \mathcal{I}m\ z>0\}$ şi $h(z)=\frac{2z-1}{2+\boldsymbol{i}z}$. Să se determine $h(D)$.

Polul $z_0=2\boldsymbol{i}$ se află pe prelungirea segmentului $[0,\boldsymbol{i}]$.

■ Fie $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1, \frac{3\pi}{2}<\arctan z<2\pi\}$ şi $h(z)=\frac{z-1}{z-\boldsymbol{i}}$. Să se determine $h(D)$.

Polul $z_0=\boldsymbol{i}\in\partial D$.

■ Fie $h(z)=\frac{z+\boldsymbol{i}}{z-1}$. Să se determine imaginea celor patru cadrane prin h.

■ Să se determine transformările omografice care transformă discul unitate în semiplanul superior.

Se determină inversa funcţiei din proporziţia e46tKuXA .

■ Să se determine transformările omografice $w=h(z)$ pentru care:

1^o $\mathcal{Re}\, z>0 \overset{h}{\mapsto} |w-1|<1$; 2^o $|z-\boldsymbol{i}|<1 \overset{h}{\mapsto} |w|<2$;

3^o $|z+\boldsymbol{i}|<1 \overset{h}{\mapsto} |w+1|<1$; 4^o $|z-a|<b \overset{h}{\mapsto} \mathcal{Im}\, w<0,\ a,b\in\mathbb{R}, b>0$.

1^o $\mathbb{e}^{i\alpha}\frac{\boldsymbol{i}z-z_0}{\boldsymbol{i}z-z_0}+1,\ \alpha\in\mathbb{R}, \mathcal{Im}\, z_0>0$.

Derivata unei funcţii complexe

Derivabilitatea funcţiilor complexe este, în principiu, similară cu cea a funcţiilor vectoriale de variabilă reală.
În cazul funcţiilor complexe (de variabilă complexă) există proprietăţi specifice. Teorema **Cauchy-Riemann** este un rezultat esenţial.
Să mai menţionăm un aspect. Fie $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Funcţia f este continuă pe $[-1,1]$ şi derivabilă pe $[-1,1] \setminus \{0\}$.
Pentru funcţii complexe poate părea surprinzător următorul rezultat:
Fie $g\colon U(0,1) \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe $U(0,1)$ şi derivabilă pe $U(0,1) \setminus \{0\}$. Atunci g este derivabilă în $z_0 = 0$!

Funcţii complexe derivabile

■ Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ nevidă şi $t_0 \in I$. Funcţia $r: I \to \mathbb{C}$ se numeşte *derivabilă* în t_0 dacă există limita şi:

$$r'(t_0) \overset{not}{=} \lim_{t \to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C}.$$

Dacă se scrie $r(t) = u(t) + \boldsymbol{i}v(t), t \in I$, încât $u, v: I \to \mathbb{R}$, atunci r este derivabilă în t_0 dacă şi numai dacă u şi v sunt derivabile în t_0 şi $r'(t_0) = u'(t_0) + \boldsymbol{i}v'(t_0)$.

Demonstraţia este evidentă.

■ Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

1^o $r: [0,1] \to [z_0, z_1],\ r(t) = (1-t)z_0 + tz_1, t \in [0,1], z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

2^o $r: [0,1] \to \mathbb{C},\ r(t) = \mathbb{e}^{2\pi i t},\ t \in [0,1].$

3^o $r: \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ r(t) = (t + \boldsymbol{i})^2 + \mathbb{e}^t \boldsymbol{i},\ t \in \mathbb{R}.$

1^o $r'(t) = z_1 - z_0,\ t \in [0,1].$

2^o $r'(t) = 2\pi \boldsymbol{i} \mathbb{e}^{2\pi i t},\ t \in [0,1].$

3^o $r'(t) = 2(t + \boldsymbol{i}) + \mathbb{e}^t \boldsymbol{i},\ t \in \mathbb{R}.$

■ Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ nevidă şi $z_0 \in G$. Funcţia $f: G \to \mathbb{C}$ se numeşte *derivabilă* în $z_0 \in G$ dacă există limita şi:

$$f'(z_0) \overset{not}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z} \in \mathbb{C}.$$

Să se demonstreze că regula de calcul a derivatelor funcţiilor polinomiale reale se păstrează pentru funcţiile polinomiale complexe. Astfel, dacă avem $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, atunci:

$$f'(z_0) = n a_n z_0^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z_0^{n-2} + \cdots + 2 a_2 z + a_1.$$

■ Fie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Aplicaţia $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte *$\mathbb{K}$-liniară* dacă:
$T(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha T(z_1) + \beta T(z_2)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Să se demonstreze că o aplicaţie $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care este $\mathbb{C}$-liniară este şi $\mathbb{R}$-liniară.

Demonstraţie evidentă.

■ Să se arate că aplicaţia $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ T(z) = \mathcal{Re}\, z$ este $\mathbb{R}$-liniară dar nu este $\mathbb{C}$-liniară.

Avem $T(\boldsymbol{i} \cdot 1) \neq \boldsymbol{i} \cdot T(1)$.

■ Se consideră o aplicaţie de forma $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ T(z) = a \cdot \mathcal{Re}\, z + b \cdot \mathcal{Im}\, z$.

1^o Să se demonstreze că aplicaţia este $\mathbb{R}$-liniară.

2^o Să se arate că aplicaţia este şi $\mathbb{C}$-liniară dacă şi numai dacă $b = a\boldsymbol{i}$.

■ Aplicaţia $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este $\mathbb{C}$-liniară dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{C}$ încât $T(z) = \alpha z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Dacă $T(z) = \alpha z,\ \alpha \in \mathbb{C}$ atunci se verifică relaţia:
$T(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2) = \beta_1 T(z_1) + \beta_2 T(z_2)$, pentru orice $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Reciproc, din aditivitate avem $T(0) = 0$. Apoi alegând $z_2 = 0$ găsim $T(\beta z) = \beta T(z)$, pentru orice $\beta \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$. Punem $z = 1$, de unde $T(\beta) = \beta T(1)$. Se alege: $\alpha := T(1)$.

■ O aplicaţie $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este $\mathbb{R}$-liniară dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{C}$ încât $T(z) = az + b\bar{z}$.

■ Fie $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Funcţia $f: G \to \mathbb{C}$ se numeşte *$\mathbb{K}$-diferenţiabilă* în z_0 dacă există o aplicaţie $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care să fie $\mathbb{K}$-liniară şi:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-T(z-z_0)}{|z-z_0|}=0. \qquad (1)$$

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$. O funcţie $f: G \to \mathbb{C}$ derivabilă în orice punct din G se numeşte *olomorfă* pe G.

Observaţii.

1^o În definiţia precedentă s-a urmărit analogia cu următoarea afirmaţie: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă există o aplicaţie $R: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liniară încât:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-R(x-x_0)}{|x-x_0|}=0.$$

Aplicaţia $R: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este liniară dacă şi numai dacă există $d \in \mathbb{R}$ încât $R(x)=\mathrm{d}x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Desigur, $d=f'(x_0)$.

2^o În această definiţie sunt conţinute ambele noţiuni, atât cea de $\mathbb{R}$-diferenţiabilitate, cât şi cea de $\mathbb{C}$-diferenţiabilitate. Legătura dintre acestea este dată de relaţia între $\mathbb{R}$-liniaritate şi $\mathbb{C}$-liniaritate. Evident atunci, dacă o funcţie este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în z_0 atunci este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0. Se pune problema reciprocei.

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f: G \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in G$. Atunci f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în z_0 dacă şi numai dacă există o aplicaţie $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care să fie $\mathbb{C}$-liniară şi o funcţie $g: G \to \mathbb{C}$ continuă în z_0 cu $g(z_0)=0$ astfel încât:

$$f(z)=f(z_0)+T(z-z_0)+g(z)\cdot|z-z_0|, \text{ pentru orice } z \in G. \qquad (2)$$

Presupunem că f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în z_0. Existenţa aplicaţiei $\mathbb{C}$-liniare $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este asigurată prin definiţie.
Funcţia $g: G \to \mathbb{C}$ continuă în z_0 se construieşte în mod natural astfel:

$$g(z)=\begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)-T(z-z_0)}{|z-z_0|}, & \text{dacă } z \in G \setminus \{z_0\} \\ 0, & \text{dacă } \quad z=z_0 \end{cases}$$

Reciproc, din existenţa aplicaţiei $\mathbb{C}$-liniare $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi a funcţiei $g: G \to \mathbb{C}$ continuă în z_0 pentru care să aibă loc relaţia (2) trebuie arătat că are loc (1). Aceasta se poate deduce cu uşurinţă (vezi B6WsWT6r)

Observaţii.

1^o Din demonstraţia propoziţiei precedente de poate deduce echivalenţa dintre noţiunea de derivabilitate în z_0 în $\mathbb{C}$-diferenţiabilitate în z_0 a unei funcţii complexe. Aplicaţia $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-liniară are forma $T(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)z$.

2^o Funcţia f admite derivate parţiale în (x_0, y_0) dacă şi numai dacă u şi v admit derivate parţiale în (x_0, y_0) şi au loc egalităţile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+\boldsymbol{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+\boldsymbol{i}\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

Simbolic avem: $f_x=u_x+\boldsymbol{i}v_x$ şi $f_y=u_y+\boldsymbol{i}v_y$.

3^o Se consideră următoarele notaţii:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \overset{not}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)-\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right]$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \overset{not}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)+\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right]$$

Simbolic avem: $f_z=(f_x-\boldsymbol{i}f_y)/2$ şi $f_{\bar z}=(f_x+\boldsymbol{i}f_y)/2$. Se obţin relaţiile:
$f_x=f_z+f_{\bar z}$ şi $f_y=(f_z-f_{\bar z})\boldsymbol{i}$.

Teorema CAUCHY-RIEMANN

■ (*Teorema* ***CAUCHY-RIEMANN***). $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este derivabilă în $z_0 \in \mathbb{C}$ dacă şi numai dacă f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0 şi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Presupunând că f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0, avem $g: G \to \mathbb{C}$ continuă în z_0 cu $g(z_0) = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât:

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + g(z) \cdot |z - z_0|,$$

pentru orice $z \in G$. Alegem $z = (x_0, y_0) \in G$; prin trecere la limită $z \to z_0$ avem $x \to x_0$ astfel că $a = f_x$. Alegând $z = (x_0, y) \in G$, prin trecere la limită $z \to z_0$ avem $y \to y_0$ astfel că $b = f_y$. Condiţia $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ sau $f_x + \boldsymbol{i} f_y = 0$ duce la $b = a\boldsymbol{i}$, deci f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă.

Reciproc, dacă f este derivabilă în z_0 atunci este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în z_0 şi implicit $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0. Mai mult, din identitatea:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)(z - z_0) = a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0), \qquad z = x + \boldsymbol{i}y$$

găsim $b = a\boldsymbol{i}$, deci $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Condiţia $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ revine la sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Derivata unei funcţii complexe este dată de:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \boldsymbol{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Teorema CAUCHY-RIEMANN. Exerciţii

■ Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcţii:

1^o $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $f(z)=\exp z = \mathbb{e}^z \ \forall\, z\in\mathbb{C}$.

2^o Funcţiile ''sinus'', ''cosinus'', ''sinus hiperbolic'' şi ''cosinus hiperbolic''.

3^o $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2+\mathcal{Im}\, z$.

4^o $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2+\mathcal{Im}\, z^2$.

1^o $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbb{e}^x(\cos y+\boldsymbol{i}\sin y)\right)(z_0)= \left.\mathbb{e}^x(\cos y+\boldsymbol{i}\sin y)\right|_{z=z_0}=f(z_0)$,

pentru orice $z_0\in\mathbb{C}$.

Aşadar: $(\mathbb{e}^z)'=\mathbb{e}^z$, pentru orice $z\in\mathbb{C}$.

2^o $(\sin z)'=\frac{1}{2i}\left(\mathbb{e}^{iz}+\mathbb{e}^{iz}\right)'=\left(\mathbb{e}^{iz}+\mathbb{e}^{iz}\right)/2=\cos z$, pentru orice $z\in\mathbb{C}$. Analog $(\cos z)'=-\sin z$, pentru orice $z\in\mathbb{C}$.
Mai mult, $(sh\, z)'=ch\, z$ şi $(ch\, z)'=sh\, z$. Funcţiile exp , sh, ch sunt olomorfe pe $\mathbb{C}$.

3^o $u=\mathcal{Re}\, f=x^2-y^2+y$ şi $v=\mathcal{Im}\, f=2xy$. Condiţiile **CAUCHY-RIEMANN** devin:

$$\begin{cases} 2x=2x \\ -2y+1=-2y\,. \end{cases}$$

Sistemul neavând soluţie, rezultă că funcţia nu este derivabilă în niciun punct.

4^o $u=\mathcal{Re}\, f=x^2-y^2+2xy$ şi $v=\mathcal{Im}\, f=2xy$. Condiţiile **CAUCHY-RIEMANN** devin:

$$\begin{cases} 2x+2y=2x \\ -2y+2x=-2y\,. \end{cases}$$

cu soluţia $(x,y)=(0,0)$; funcţia este derivabilă numai în punctul $z_0=0$.

Funcţii monogene

■ Fie funcţia complexă $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ şi $z_0 \in D$. Atunci funcţia complexă de variabilă complexă:

$$\rho \in \mathcal{F}(D \setminus \{z_0\},\ \mathbb{C}), \qquad \rho(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se numeşte *raportul incrementar în punctul* z_0 al funcţiei f.
Spunem că funcţia complexă $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ este *monogenă* sau *derivabilă* în punctul $z_0 \in D$ dacă funcţia raport incrementar în punctul z_0 al funcţiei f are limită în punctul z_0.

Dacă funcţia complexă

#db2
http://vignette3.wikia.nocookie.net/math/images/2/22/Capitole_de_matematici_speciale_%28Cr%C4%83ciun%29.pdf/revision/latest?cb=20160827131322&path-prefix=ro pag. 149

Integrabilitatea funcţiilor complexe

Integrala complexă se va defini ca un caz particular al integralei **Riemann-Stieltjes**. Mai exact, se va integra o funcţie continuă în raport cu o funcţie cu variaţie mărginită.
Din teoria integralei **Riemann-Stieltjes** (**RS**) se reamintesc câteva rezultate. Fie $u_1, u_2: [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă u_1 este integrabilă (**RS**) în raport cu u_2 atunci şi u_2 este integrabilă (**RS**) în raport cu u_1 şi are loc formula de integrare prin părţi:

$$\int_a^b u_1 u_2 + \int_a^b u_2 u_1 = u_1 u_2 \Big|_a^b .$$

Câteva criterii suficiente de integrabilitate (**RS**) sunt următoarele. Dacă u_1 este integrabilă **Riemann** şi u_2 este lipschitziană atunci u_1 este integrabilă (**RS**) în raport cu u_2.
Dacă u_1 este continuă şi u_2 este monotonă, atunci u_1 este integrabilă (**RS**) în raport cu u_2.
Dacă u_1 este continuă şi u_2 este cu variaţie mărginită, atunci u_1 este integrabilă (**RS**) în raport cu u_2.

Integrala unei funcţii complexe de variabilă reală

■ Fie $f, g: [a, b] \to \mathbb{C}$ cu $u = \mathcal{Re}\, f\,,\ v = \mathcal{Im}\, f$ iar $p = \mathcal{Re}\, g\,,\ q = \mathcal{Im}\, g$.
Spunem că f este *integrabilă **Riemann-Stieltjes** în raport cu* g dacă $u, v: [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile **Riemann-Stieltjes** în raport cu funcţiile $p, q: [a, b] \to \mathbb{R}$. Valoarea integralei este numărul complex definit astfel:

$$\int_a^b f \mathrm{d}g = \int_a^b u \mathrm{d}p - \int_a^b \mathrm{vdq} + \boldsymbol{i}\left(\int_a^b u \mathrm{d}q + \int_a^b v \mathrm{d}p\right).$$

Fie $f, g: [a, b] \to \mathbb{C}$. Dacă f este continuă şi g este derivabilă, atunci f este integrabilă **Riemann-Stieltjes** în raport cu g şi:

$$\int_a^b f \mathrm{d}g = \int_a^b f(t) \cdot g'(t)\, \mathrm{dt}\ .$$

CALCUL MULTIVARIABIL

Bibliografie:

- Calculo-Vectorial-y-Aplicaciones-Estrada-Garcia
- Analyse vectorielle (copy) (Antoine Gournay)
- Geometrie analitică (EduManager)
- Algebră liniară (curs POSDRU)
- Analyse vectorielle (Béatrice de Tilière)

Spaţiul $\mathbb{R}^n$

■ Fie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$. Definim *distanţa dintre puntele* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ ca fiind numărul pozitiv:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ (x_k - y_k)^2}.$$

Distanţa dintre puntele lui $\mathbb{R}^k$ posedă proprietăţile:

1^o $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;

2^o $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^k$;

3^o $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^k$.

Primele două proprietăţi sunt uşor de demonstrat. Pentru cea de-a treia, fie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$. Utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \cdot \sum_{i=1}^k \beta_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i\right)^2\right)$, obţinem:

$$[d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})]^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^k (y_i - z_i)^2 + + 2\sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - z_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^k (y_i - z_i)^2} \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^k (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^k (y_i - z_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - z_i)\ (y_i - z_i) = \sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2 = d^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Observaţie. Acest exerciţiu arată că d este o *metrică* pe X, care va fi numită *metrica euclidiană*.

■ Definim pe $\mathbb{R}^k$ adunarea şi înmulţirea cu un scalar astfel:

Dacă $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ şi $t \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots,\ \ x_k + y_k) \qquad t \cdot \boldsymbol{x} = (tx_1, tx_2, \dots, tx_k)\ .$$

Faţă de aceste operaţii, $\mathbb{R}^k$ se organizează ca un spaţiu vectorial real.

Trebuie demonstrate proprietăţile:

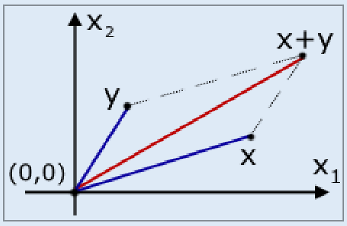
1^o $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z},\ \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^k$ ... ... (asociativitatea adunării)
2^o $\exists\, \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ a.î. $\boldsymbol{x} + 0 = \boldsymbol{x},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ (existenţă element neutru la adunare)
3^o $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k, \exists\, (-\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^k$ a.î. $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = 0$ ... ... (existenţa opusului)
4^o $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x},\ \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ ... ... (comutativitatea adunării)

... $(\mathbb{R}^k, +)$ grup comutativ

5^o $t \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = t \cdot \boldsymbol{x} + t \cdot \boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
6^o $(t + s) \cdot \boldsymbol{x} = t \cdot \boldsymbol{x} + s \cdot \boldsymbol{x},\ \forall\, t, s \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$
7^o $(t \cdot s) \cdot \boldsymbol{x} = t \cdot (s \cdot \boldsymbol{x}),\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}, \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$
8^o $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$.

Observaţie. În $\mathbb{R}^2$ adunarea a două puncte $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ şi $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ se face după *regula paralelogramului* ilustrată mai jos:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2).$$



Definim norma unui vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots x_2) \in \mathbb{R}^k$ ca fiind:

$$\|\boldsymbol{x}\| = d(\boldsymbol{x}, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}\,.$$

Să se demonstreze că norma unui vector satisface axiomele specifice din definiţia normei pentru un spaţiu metric:
1^o $\|\boldsymbol{x}\| = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
2^o $\|t \cdot \boldsymbol{x}\| = |t| \cdot \|\boldsymbol{x}\|,\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$.
3^o $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|,\ \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ (*inegalitatea triunghiului*).

Demonstraţia este evidentă. Pentru ultima afirmaţie avem:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\, \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

Observaţii.
1^o Inegalitatea triunghiului se poate traduce în spaţiul tridimensional prin faptul că lungimea laturii unui triunghi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi.
2^o Din propoziţia precedentă rezultă că $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ este un *spaţiu normat real*:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^k.$$

Fie $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ (sau $\mathbb{R}^2$); spunem că *$\boldsymbol{z}$ este între $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$* şi notăm cu $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}$ situaţia în care:

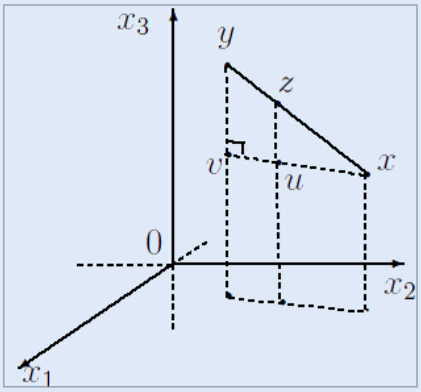
$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

Mulţimea $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3 :\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\}$ se va numi *segment* cu capete $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$.
Mulţimea $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3 :\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y} \lor \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\}$ se va numi *semidreaptă* cu originea în $\boldsymbol{x}$ şi care trece prin $\boldsymbol{y}$.
Mulţimea $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cup [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ se va numi *dreaptă* care trece prin puntele $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$.
Definiţii similare se pot da pentru segmente, semidrepte sau drepte din $\mathbb{R}^3$.

Fie $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$; atunci:
1^o $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \{(1 - t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} :\ t \in [0, 1]\}$;
2^o $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{(1 - t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} :\ t \ge 0\}$;
3^o $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{(1 - t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} :\ t \in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) :\ t \in \mathbb{R}\}$.

1^o Fie $t \in [0, 1]$ şi $\boldsymbol{z} = (1 - t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$; atunci $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| = \|t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| = t \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ şi $d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| = (1 - t)\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ de unde rezultă: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ şi deci $z \in [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$.
Reciproc, $\forall\, \boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}],\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$; fie

$$t = \frac{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})}{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} \in [0, 1].$$



$$\frac{z_3 - x_3}{y_3 - x_3} = \frac{d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})}{d\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = t$$

de unde: $z_3 = x_3 + ty_3 - tx_3 = (1-t)x_3 + ty_3$.
Similar, $z_2 = (1-t)x_2 + ty_2$ şi $z_1 = (1-t)x_1 + ty_1$, deci $\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$.

2^o $\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ sau $\boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1]$ a.î. $\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$ sau $\exists\, s \in [0,1]$ a.î. $\boldsymbol{y} = (1-s)\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{z}$.
Ultima egalitate se mai scrie: $\boldsymbol{z} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\boldsymbol{x} + \frac{1}{s}\boldsymbol{y}$ iar $t = \frac{1}{s} \geq 1$.
Rezultă că: $\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \exists t \geq 0$ a.î. $\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$.

3^o $\boldsymbol{z} \in (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cup [\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists\, t \geq 0$ a.î. $\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$, unde $t = 1 - s \leq 1$.

■ Fie $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$, $\boldsymbol{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0) \in \mathbb{R}^k$. Numim:
1^o *Segment* având drept capete punctele $\boldsymbol{x}^0$ şi $\boldsymbol{y}^0$ mulţimea: $[\,\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0] = \{\ \boldsymbol{x}^0 + t(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}^0):\ t \in [0,1]\}$.
2^o *Semidreaptă* cu originea în punctul $\boldsymbol{x}^0$ şi care trece prin $\boldsymbol{y}^0$ mulţimea: $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) = \{\ \boldsymbol{x}^0 + t(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}^0):\ t \geq 0\}$.
3^o *Dreaptă* care trece prin punctele $\boldsymbol{x}^0$ şi $\boldsymbol{y}^0$ mulţimea: $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) = \{\ \boldsymbol{x}^0 + t(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}^0):\ t \in \mathbb{R}\}$ (*ecuaţia vectorială a dreptei*).

Să se demonstreze că ecuaţia dreptei descrisă anterior mai poate fi scrisă şi sub formele:

1^0
$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t(y_1^0 - x_1^0) \\ x_2 = x_2^0 + t(y_2^0 - x_2^0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = x_k^0 + t(y_k^0 - x_k^0) \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$
(*ecuaţiile scalare* sau *parametrice* ale dreptei)

2^0
$$\frac{x_1 - x_1^0}{y_1^1 - y_1^0} = \frac{x_2 - x_2^0}{y_2^1 - y_2^0} = \cdots = \frac{x_k - x_k^0}{y_k^1 - y_k^0}.$$

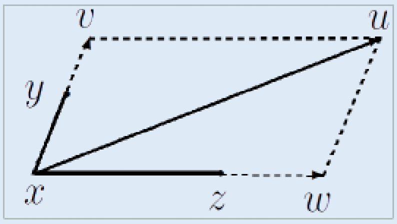
Demonstraţia este simplă. Forma 2^o se obţine din 1^o prin eliminarea parametrului t.

■ Un *versor* este un vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^k$ cu $\|\boldsymbol{u}\| = 1$.

1^o Să se arate că versorii: $\boldsymbol{u_1} = (1,0,0,\dots,0), \boldsymbol{u_2} = (0,1,0,\dots,0), \dots, \boldsymbol{u}_k = (0,0,0,\dots,1)$ formează o *bază* în $\mathbb{R}^k$ şi că orice vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceşti versori sub forma:
$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u_1} + x_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + \boldsymbol{x_k}\boldsymbol{u}_k.$$
2^o Ecuaţia unei drepte care trece prin $\boldsymbol{x}^0$ şi este paralelă cu versorul $\boldsymbol{u}$ este:
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{u}\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Observaţie. În cazul particular $k = 3$, deci în spaţiul tridimensional, dacă se notează cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ unghiurile formate de versorul $\boldsymbol{u}$ cu axele Ox_1, Ox_2, Ox_3, atunci $\boldsymbol{u} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\ \alpha_3)$ şi astfel obţinem *ecuaţia normală a dreptei*:
$$\frac{x_1 - x_1^0}{\cos\alpha_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{\cos\alpha_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{\cos\alpha_3}.$$

■ Fie $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ puncte necoliniare şi (x,y,z) planul care trece prin cele trei puncte; atunci:
$$(x,y,z) = \{\,tx + sy + rz:\ \ t,s,r \in \mathbb{R}, t+s+r = 1\,\}.$$



Se observă că $u \in (x,y,z) \Leftrightarrow \exists\, v \in (x,y), \exists\, w \in (x,z)$ a.î. $\vec{xu} = \vec{xv} + \vec{xw}$ sau $u - x = v - x + w - x \ \Leftrightarrow u = v + w - x$.
Fie $s,t \in \mathbb{R}$ a.î. $v = x + t(y-x),\ w = x + s(z-x)$. Atunci $u = ty - tx + x + sz - sx = (1-t-s)x + tx + sz$.

Observaţie. Mai simplificat, planul care trece prin x,y,z este mulţimea:

$$\Pi = \{\, u = tx + sy + (1-s-t)z:\ s,t \in \mathbb{R}\,\}.$$

Deci ecuaţia acestui plan mai poate fi scrisă: $\quad u = tx + sy + (1-s-t)z:\ s,t \in \mathbb{R}$.

■ Fie punctele necoliniare $A = (a,0,0),\ B = (0,b,0),\ C = (0,0,c)$. Să se arate că ecuaţia planului care trece prin aceste puncte este:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \qquad \textit{(ecuaţia planului prin tăieturi)}$$

Într-adevăr, ecuaţia planului care trece prin A,B,C este:

$$u = tA + sB + (1-t-s)C = (ta,0,0) + (0,sb,0) + (0,0,(1-t-s)c) = (ta,sb,(1-t-s)c).$$

Dacă notăm cu (x,y,z) coordonatele lui u obţinem:

$$\begin{cases} x = ta \\ y = sb \\ z = (1-t-s)c \end{cases}, t,s \in \mathbb{R}.$$

Se elimină parametrii t,s din aceste ecuaţii.

■ Definim *produsul scalar* sau *produsul interior* al vectorilor $x = (x_1,x_2,\dots,x_k),\ y = (y_1,y_2,\dots,y_k)$ ca fiind numărul real:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i.$$

Produsul scalar pe $\mathbb{R}^k$ posedă proprietăţile:
$(x,y) = (y,x), \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^k$;
$(tx,y) = t(x,y), \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^k, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$;
$(x+y, \quad z) = (x,z) + (y,z), \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^k$;
$(x,x) = \|x\|^2, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^k$;
$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \le \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2), \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^k$.

Vom demonstra numai ultima inegalitate:
$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^k,\ (x-ty,\ x-ty) \ge 0$ sau $(y,y)\cdot t^2 - 2(x,y)\cdot t + (x,x) \ge 0,\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$;
deci discriminantul acestui trinom de gradul al doilea trebuie să fie negativ, de unde $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

■ (*Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}^k$*). Fie $x = (x_1,x_2,\dots,x_k),\ y = (y_1,y_2,\dots,y_k) \in \mathbb{R}^k$; spunem că x este mai mic decât y şi notăm $x \le y$ dacă:

$$x_1 \le y_1, x_2 \le y_2, \dots, x_k \le y_k.$$

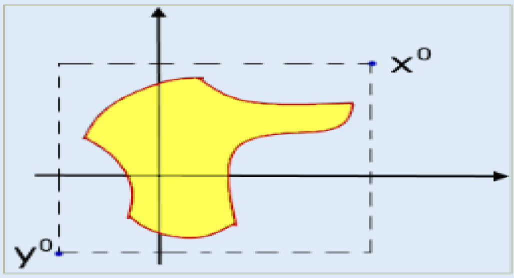
Să se demonstreze că relaţia definită anterior este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă, deci este o relaţie e ordine.

Se demonstrează uşor următoarele:
$1^o \qquad x \le x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^k$;
$2^o \qquad x \le y\ \wedge y \le x\ \Rightarrow x = y$;
$3^o \qquad x \le y \wedge\ \ y \le z\ \Rightarrow x \le z$.

Observaţie. Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}^k$ nu este totală; de exemplu $(0,1)$ nu este comparabil cu $(1,0)$ în $\mathbb{R}^2$.

■ O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^k$ este *mărginită superior* în $\mathbb{R}^k$ dacă există un *majorant* pentru A, deci dacă există un element $x^0 \in \mathbb{R}^k$ a.î. $x \le x^0,\ \forall\, x \in A$.
O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^k$ este *mărginită inferior* în $\mathbb{R}^k$ dacă există un *minorant* pentru A, deci dacă există un element $x^0 \in \mathbb{R}^k$ a.î. $x \ge x^0,\ \forall\, x \in A$.
O mulţime este *mărginită* dacă este mărginită superior şi mărginită inferior.

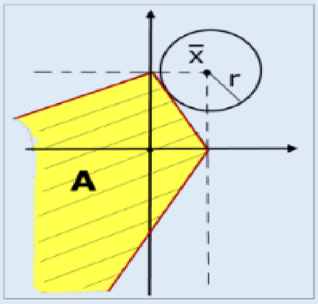
Exemplu. În figura de mai jos este ilustrată o astfel de situaţie în $\mathbb{R}^2$, unde x^0 este un majorant, iar y^0 este un minorant pentru mulţimea A.



Orice mulţime nevidă şi mărginită superior (mărginită inferior) din $\mathbb{R}^k$ admite margine superioară (margine inferioară).

Presupunem că $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) \in \mathbb{R}^k$ este un majorant pentru mulţimea nevidă A.
Fie $A_1 = \{\, a \in \mathbb{R} : \ \exists\, x = (a, x_2, \dots, x_k) \in A \,\}$.
A_1 este o mulţime nevidă şi mărginită superior de x_1^0 în $\mathbb{R}$. Rezultă că există $\overline{x_1} = \sup A_1 \in \mathbb{R}$.
Raţionăm similar şi pentru celelalte coordonate şi găsim $\overline{x_2}, \dots, \overline{x_k}$ margini superioare pentru $A_2, \dots, A_k$, respectiv.
Fie $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_k}) \in \mathbb{R}^k$. Rezultă imediat că $\bar{x}$ este marginea superioară a mulţimii A. Similar se arată că dacă A este mărginită inferior, $\exists\, \bar{y} = \inf A$.

Observaţie. Trebuie remarcat că, spre deosebire de $\mathbb{R}$, în $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, nu ne putem apropia oricât de marginea superioară a unei mulţimi cu puncte din mulţime. Astfel, în figura de mai jos $\bar{x} = \sup A$ însă $\forall\, x \in A$, $d(x, \bar{x}) \geq r$.



■ Fie $x^0 \in \mathbb{R}^k$ şi $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$; mulţimea:
$$\mathcal{S}(x^0, r) = \{\, x \in \mathbb{R}^k : \ d(x, x^0) = \|x - x^0\| < r \,\}$$
se numeşte *sferă deschisă* cu centrul în x^0 şi de rază r iar mulţimea:
$$\mathcal{T}(x^0, r) = \{\, x \in \mathbb{R}^k : \ d(x, x^0) = \|x - x^0\| \leq r \,\}$$
se numeşte *sferă închisă* cu centrul în x^0 şi de rază r.

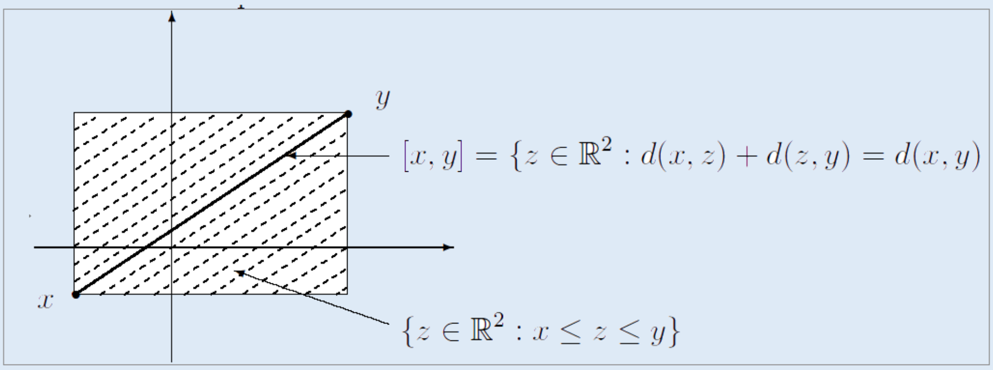
O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^k$ este mărginită dacă şi numai dacă există un număr $r > 0$ a.î. $A \subseteq \mathcal{T}(0, r)$ (sau $\|x\| \leq r, \ \forall\, x \in A$).

($\Rightarrow$) Presupunem că A este mărginită; fie $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0)$ un minorant şi $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ un majorant pentru A.
Rezultă că $\forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in A$, $y_i^0 \leq x_i \leq x_i^0$, $\forall\, i = 1,2, \dots, k$
şi deci că: $|x_i| \leq \max\{\, |x_i^0|, |y_i^0| \,\} \leq \max\{\, |x_i^0|, |y_i^0|, \ i = 1,2, \dots, k \}$.
Atunci:
$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leq k \cdot \max\left\{ \left(x_i^0\right)^2, \left(y_i^0\right)^2 : \ i = 1,2, \dots, k \right\},$$
de unde: $\|x\| \leq \sqrt{k} \cdot \max\{\, |x_i^0|, |y_i^0|, \ i = 1,2, \dots, k \}$.
Putem deci alege: $r = \sqrt{k} \cdot \max\{\, |x_i^0|, |y_i^0|, \ i = 1,2, \dots, k \}$.

($\Leftarrow$) Presupunem că există un număr $r > 0$ a.î. $A \subseteq \mathcal{T}(0, r)$ şi notăm $x^0 = (r, r, \dots, r), y^0 = (-r, -r, \dots, -r)$.
Este evident că y^0 este un minorant iar x^0 este un majorant pentru mulţimea A.

Observaţii.
1^o În cazul particular $k = 3$ sferele deschise sunt exact sferele geometrice pline fără ''coajă'', iar sferele închise sunt sferele pline din spaţiu.
Pentru $k = 2$, sferele deschise (închise) sunt discurile geometrice deschise (închise); în cazul $k = 1$ sferele deschise sunt intervale deschise iar sferele închise sunt intervale închise, centrul fiind mijlocul intervalului iar raza fiind egală u jumătate din lungimea acestuia.

2^o Fie $x, y \in \mathbb{R}^k, x \le y$; atunci $[x, y] \subsetneq \{ z\colon\ x \le z \le y \}$. În $\mathbb{R}^2$ acest lucru poate fi ilustrat ca mai jos:



Fie $x^0 \in \mathbb{R}^k$; o mulţime $V \subseteq \mathbb{R}^k$ se numeşte *vecinătate* a punctului x^0 dacă există un număr $r > 0$ a.î. $\mathcal{S}(x^0, r) \subseteq V$. Vom nota cu $\mathcal{V}(x^0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui x^0.

Observaţie. $\mathcal{V}(x^0)$ este o submulţime a mulţimii $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ a tuturor părţilor lui $\mathbb{R}^k$. Evident că $\forall\, x \in \mathbb{R}^k, \forall\, r > 0, \mathcal{S}(x, r) \in \mathcal{V}(x)$.

Fie $x^0 \in \mathbb{R}^k$; $\forall\, x \in \mathbb{R}^k$ fie $\mathcal{V}(x)$ mulţimea vecinătăţilor lui x. Atunci:

(V_1) $V \in \mathcal{V}(x^0),\ V \subseteq W \ \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x^0)$;

(V_2) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x^0) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x^0)$;

(V_3) $x^0 \in V,\ \forall\, V \in \mathcal{V}(x^0)$;

(V_4) $\forall\, V \in \mathcal{V}(x^0),\ \exists\, W \in \mathcal{V}(x^0)$ a.î. $V \in \mathcal{V}(x),\ \forall\, x \in W$;

(V_5) $\forall\, y^0 \ne x^0,\ \exists V \in \mathcal{V}(x^0),\ \exists\, W \in \mathcal{V}(y^0)$ a.î. $V \cap W = \emptyset$.

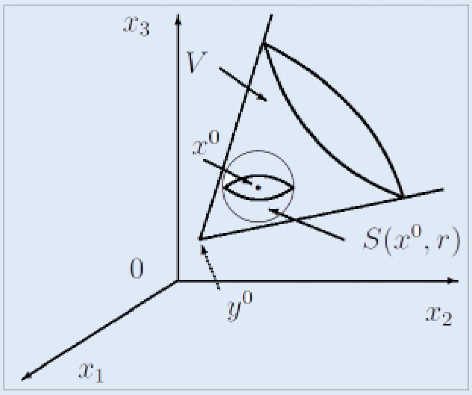
Vom schiţa demonstraţia doar pentru ultimele două proprietăţi:

(V_4) Oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x^0)$ există $r > 0$ aşa fel încât $\mathcal{S}(x^0, r) \subseteq V$; atunci
$W = \mathcal{S}(x^0, r) \in \mathcal{V}(x^0)$ şi $\quad \forall\, x \in W,\ d(x, x^0) = \|x - x^0\| < r$.

Fie $r_1 = r - \|x - x^0\| > 0$. Atunci:
$$\forall\, y \in \mathcal{S}(x, r_1),\ d(y, x^0) = \|y - x^0\| \le \|y - x\,\| + \|x - x_0\| < r_1 + \|x - x^0\| = r\,,$$
deci: $y \in \mathcal{S}(x^0, r)$. Rezultă că $\quad \mathcal{S}(x, r_1) \subseteq \mathcal{S}(x^0, r) \subseteq V$ ceea ce implică $V \in \mathcal{V}(x)$.

(V_5) Fie $x^0 \ne y^0$; atunci $r = \frac{1}{2} \cdot d(x^0, y^0) = \frac{1}{2} \cdot \|x^0 - y^0\| > 0$.
$\mathcal{S}(x^0, r) \in \mathcal{V}(x^0),\ \mathcal{S}(y^0, r) \in \mathcal{V}(y^0)$ şi intersecţia celor două vecinătăţi este vidă. Într-adevăr, dacă ar exista un element comun x, atunci $2 \cdot r = d(x^0, y^0) \le d(x^0, x) + d(x, y^0) < r + r = 2 \cdot r$, ceea ce este absurd.

Exemplu. În figura de mai jos $V \subseteq \mathbb{R}^3$ este un con plin cu vârful în y^0 iar x^0 este un punct în interiorul lui V; după cum se poate constata în figură, V este vecinătate pentru x^0, dar nu este vecinătate pentru y^0.



Fie $x^0 \in \mathbb{R}^k$; o familie de mulţimi $\mathcal{V}_0(x^0) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ se numeşte *sistem fundamental de vecinătăţi* dacă:

1^o $\mathcal{V}_0(x^0) \subseteq \mathcal{V}(x^0)$;

2^o $\forall\, V \in \mathcal{V}(x^0),\ \exists\, W \in \mathcal{V}_0(x^0)$ a.î. $W \subseteq V$.

Următoarele familii de mulţimi sunt sisteme fundamentale numărabile de vecinătăţi pentru un punct $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$:

$a)$ $\left\{ \mathcal{S}\left(x, \frac{1}{n}\right) :\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

$b)$ $\left\{ \prod_{i=1}^{k} \left(x_i - \frac{1}{n}, x_i + \frac{1}{n}\right) :\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Demonstraţia este simplă.

Observaţie. Utilitatea acestei propoziţii se datorează faptului că în practică este mai dificil de operat cu noţiunea generală de vecinătate; unele vecinătăţi, cum ar fi sferele, oferă simplificări ale raţionamentelor.

■ O funcţie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^k$ se numeşte *şir de vectori* în $\mathbb{R}^k$ şi se notează $f(n)=x^n=(x_1^n,x_2^n,\dots,x_k^n),\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.
Şirurile de numere reale $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}},\dots,\ (x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se vor numi şirurile de coordonate asociate şirului $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ca şi la şirurile de numere reale, se va folosi pentru şirul f notaţia mai sugestivă $f\equiv(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau pur şi simplu (x^n). pentru a indica mulţimea $A\subseteq\mathbb{R}^k$ ca mulţime de valori pentru şirul f vom nota (abuziv!) $(x^n)\subseteq A$.

Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^k$ un şir; şirul $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^k$ se numeşte *subşir* al şirului f dacă există o funcţie strict crescătoare $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ a.î. $g=f\circ\varphi$.
Dacă notăm $\varphi(n)=l_n,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ atunci un subşir al şirului f este $g\equiv\left(x^{l_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir strict crescător de numere naturale.

Să se demonstreze următoarele propoziţii:
1^o Pentru orice mulţime infinită de numere naturale $N\subseteq\mathbb{N}$ există o unică bijecţie strict crescătoare $\varphi:\mathbb{N}\to N$.
2^o Orice subşir al şirului f este restricţia funcţiei f la o submulţime infinită $N\subseteq\mathbb{N}$.

1^o Fie $N\subseteq\mathbb{N}$ o mulţime infinită de numere naturale; deoarece N este nevidă şi relaţia de ordine pe $\mathbb{N}$ este o relaţie de bună ordonare, există un cel mai mic element l_0 al mulţimii N; mulţimea infinită $N\setminus\{l_0\}$ este nevidă şi deci are un prim element l_1.

■ Fie $(x^n)_n\subseteq\mathbb{R}^k$ un şir de vectori şi fie $x\in\mathbb{R}^k$. Se spune că şirul $(x^n)_n$ *converge* la x dacă pentru orice vecinătate $V\in\mathcal{V}(x)$ există un rang $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât:

$$x^n\in V\,,\qquad\forall\, n\geq n_0\,.$$

Se notează acest lucru prin $x^n\to x$ sau, pentru a marca spaţiul în care are loc convergenţa, $x^n\underset{\mathbb{R}^k}{\to}x$.

Un şir $(x^n)_n\subseteq\mathbb{R}^k$ se numeşte *convergent* dacă există un $x\in\mathbb{R}^k$ astfel încât $x^n\to x$.
Vectorul x se va numi *limita* şirului convergent $(x^n)_n$. Un şir care nu este convergent se numeşte *divergent*.

Un şir $(x^n)\subseteq\mathbb{R}^k$ este convergent la x dacă şi numai dacă şirul de numere reale $(\|x^n-x\,\|)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la zero.

$(\Rightarrow)$ Presupunem că $x^n\to x$ şi fie $\varepsilon>0$ arbitrar; atunci sfera $\mathcal{S}(x,\varepsilon)\in\mathcal{V}(x)$ şi deci există $n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $n\geq\ n_0,\ \ x^n\in\mathcal{S}(x,\varepsilon)$ ceea ce este echivalent cu $\|x^n-x\|<\varepsilon$. Deci $\|x^n-x\|\to 0$.
$(\Leftarrow)$ Presupunem că $\|x^n-x\|\to 0$ şi fie V o vecinătate arbitrară a lui x.
Din definiţia vecinătăţilor, există $r>0$ a.î. $\mathcal{S}(x,r)\subseteq V$ şi astfel există $n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $\|x^n-x\|<r,\ \ \forall\, n\geq n_0$. De aici rezultă că pentru orice $n\geq n_0,\ \ x^n\in\mathcal{S}(x,r)\subseteq V$.

■ Fie şirul $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^k,\ \ x^n=(x_1^n,x_2^n,\dots,x_k^n),\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ şi fie $x=(x_1,x_2,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$;

$$x^n\underset{\mathbb{R}^k}{\to}x\ \Leftrightarrow\ x_i^n\underset{\mathbb{R}^k}{\to}x_i,\qquad\forall\, i\in\{1,2,\dots,k\}.$$

Demonstraţia rezultă din inegalităţile:
$(\star)$ $|x_i^n-x_i|\leq\|x^n-x\|\leq\sqrt{k}\cdot\max\{|x_i^n-x_i|:\ i=1,2,\dots k\}$.
Într-adevăr, dacă presupunem că $x^n\to x$ atunci $\|x^n-x\|\to 0$ şi, din prima inegalitate a relaţiei $(\star)$, $x_i^n\to x_i,\ \ \forall\, i=1\,,2,\dots,k$.
Reciproc, dacă $\forall\, i\in\{1,2,\dots,k\},\ \ x_i^n\underset{\mathbb{R}^k}{\to}x_i$, atunci $\forall\,\varepsilon>0,\ \ \exists\, n_i\in\mathbb{N}$ a.î.
(i) $|x_i^n-x_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}},\ \ \forall\, n\geq n_i$.
Fie $n_0=\max\{n_i:\ i=1,2,\dots,k\};\ \ \forall\, n\geq n_0$ şi $\forall\, i=1,2,\dots,k,\ \ n\geq n_i$ şi atunci, din relaţia (i),

$$|x_i^n-x_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$$

de unde:

$$\sqrt{k}\cdot\max\{|x_i^n-x_i|:\ \ i=1,2,\dots,k\}<\varepsilon.$$

Utilizând inegalitatea din dreapta relaţiei $(\star)$ rezultă că $\|x^n - x\| \to 0$ şi deci $x^n \to x$.

Observaţie. Conform acestei propoziţii, convergenţa unui şir de vectori din $\mathbb{R}^k$ se reduce la convergenţa şirurilor de coordonate asociate lui.

■ 1^o Limita unui şir convergent este unică.
2^o Orice şir convergent este mărginit.
3^o $x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\to} x \Rightarrow \|x_i^n\| \underset{\mathbb{R}}{\to} \|x_i\|$.
4^o Dacă într-un şir schimbăm ordinea termenilor, natura sa nu se schimbă, iar în cazul în care este convergent, limita sa rămâne aceeaşi.
5^o Dacă unui şir îi adăugăm sau îi suprimăm un număr finit de termeni, natura şirului nu se schimbă, iar în caz de convergenţă, nici limita.
6^o Orice subşir al unui şir convergent converge la aceeaşi limită.

Deoarece convergenţa şirurilor în $\mathbb{R}^k$ este echivalentă cu convergenţa şirurilor de coordonate, demonstraţia proprietăţilor $1^o, 4^o, 5^o$ şi 6^ose bazează pe proprietăţile similare ale şirurilor de numere reale.
2^o Fie $(x^n) \in \mathbb{R}^k$ convergent şi fie $x \in \mathbb{R}^k$ limita sa; atunci $\|x^n - x\| \to 0$.
Pentru $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\|x^n - x\| < 1$, $\forall\, n \geq n_1$. Notăm cu
$$r = \max\{\|x^0\|, \|x^1\|, \dots, \|x^{n_1-1}\|, \|x\| + 1\};$$
atunci, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\|x^n\| \leq r$. Într-adevăr, dacă $n < n_1$, atunci este evidentă inegalitatea iar dacă $n \geq n_1$, $\|x^n\| \leq \|x^n - x\| + \|x\| < 1 + \|x\| \leq r$.
Rezultă că $\{x^n\colon\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{T}(0, r)$ şi deci (x^n) este un şir mărginit (mulţimea termenilor săi este o mulţime mărginită).
3^o Presupunem că $x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\to} x$; atunci cum:
$$\|x^n\| - \|x\| \leq \|x^n - x\|, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$
rezultă că $\|x^n\| \underset{\mathbb{R}^k}{\to} \|x\|$.

■ (*Operaţii cu şiruri convergente*). Fie $(x^n), (y^n) \subseteq \mathbb{R}^k$, $x, y \in \mathbb{R}^k$, $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ şi $t \in \mathbb{R}$; atunci:

1^o $\left.\begin{array}{r} x^n \to x \\ y^n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow x^n + y^n \to x + y.$

2^o $\left.\begin{array}{r} x^n \to x \\ t_n \to t \end{array}\right\} \Rightarrow t_n \cdot x^n \to t \cdot x.$

3^o $\left.\begin{array}{r} x^n \to x \\ y^n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow (x^n, y^n) \to (x, y).$

1^o Deoarece $x^n \to x$ şi $y^n \to y$, $\|x^n - x\| \to 0$ şi $\|y^n - y\| \to 0$; concluzia este o consecinţă a inegalităţii:
$$\|(x^n + y^n) - (x + y)\| \leq \|x^n - x\| + \|y^n - y\|.$$
2^o $\|t_n \cdot x^n - t \cdot x\| \leq \|t_n \cdot x^n - t_n \cdot x\| + \|t_n \cdot x - t \cdot x\| = |t_n| \cdot \|x^n - x\| + |t_n - t| \cdot \|x\|$.
Deoarece (t_n) este convergent la t (deci este şi mărginit!) iar (x^n) este convergent la x, din inegalitatea de mai sus rezultă că $t_n \cdot x^n \to t \cdot x$.
3^o $|(x^n, y^n) - (x, y)| \leq |x^n - x,\ y| + |x,\ y^n - y| \leq \|x^n - x\| \cdot \|y^n\| + \|x\| \cdot \|y^n - y\|$.
Deoarece (x^n) este convergent la x şi (y^n) este convergent la y (deci şi mărginit!), rezultă din relaţia de mai sus că $(x^n, y^n) \to (x, y)$.

■ Orice şir monoton crescător şi mărginit converge la marginea superioară a mulţimii termenilor săi.
Orice şir monoton descrescător şi mărginit converge la marginea inferioară a mulţimii termenilor săi.

Fie $(x^n) \subseteq \mathbb{R}^k$ un şir crescător şi mărginit, unde $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n)$. Ţinând cont de definiţia relaţiei e ordine rezultă că $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, i \in \{1,2, \dots, k\}$, $x_i^n \leq x_i^{n+1}$.

Resurse: [Michael Corral, Vector Calculus]

Limită a unei funcţii multivariabile

■ Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ şi $f: A \to \mathbb{R}^l$;

- dacă $k = l = 1$, f este o funcţie reală de o variabilă reală;
- dacă $k > 1$ şi $l = 1$, f este o funcţie reală sau *scalară* de mai multe variabile;
- dacă $k = 1$ şi $l > 1$, f este o funcţie *vectorială* de o variabilă reală;
- în sfârşit, în cazul $k > 1, l > 1$, f este o funcţie vectorială de mai multe variabile reale.

Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ şi $a \in A'$ (a punct de acumulare pentru A); spunem că elementul $L \in \mathbb{R}^l$ este *limita* funcţiei f în punctul a dacă pentru orice şir $(x^n) \subseteq A \setminus \{a\}$, $x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\to} a$, $f(x^n) \underset{\mathbb{R}^l}{\to} L$.
Vom nota această situaţie cu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.
Vom spune că o funcţie f are limită într-un punct de acumulare $a \in A'$ acă există $L \in \mathbb{R}^l$ a.î. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Fie $f = (f_1, f_2, \dots, f_m): A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $a \in A'$ şi $L = (L_1, L_2, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^l$.
Funcţia vectorială f are limita L în a dacă şi numai dacă $\forall\, i \in \{1,2, \dots, m\}$, funcţia scalară f_i are limita L_i în a.

■ **2.1.1.** (*Definiţia lui* ***CAUCHY*** *sau definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei*) Fie o funcţie $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde D este o mulţime deschisă.
Numărul real $l \in \mathbb{R}$ este *limita funcţiei* în punctul $(x_0, y_0) \in D$ dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ există un $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$ deci depinzând de ε, astfel încât din $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ să rezulte $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.
Se notează $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = l$ sau $f(x, y) \to l$ dacă $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

(*Definiţia* ***HEINE*** *sau în limbaj de şiruri a limitei*) Numărul real l este limita funcţiei f în punctul (x_0, y_0) dacă şirul $\left(f(x_n, y_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita l pentru orice şir dublu $\left((x_n, y_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ din $B_\delta \setminus \{(x_0, y_0)\}$ convergent către (x_0, y_0).

Cele două definiţii sunt echivalente.

[Demonstraţia se efectuează ca în cazul funcţiilor cu o singură variabilă.]

■ Limita unei funcţii de mai multe variabile posedă următoarele proprietăţi:
1^o Limita unei funcţii într-un punct este unică.
2^o Dacă există $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y)$ şi există $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g(x, y)$ atunci:

- $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) = \alpha \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) + \beta \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g(x, y)$.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)\cdot g(x,y)) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$.

3^o Limita funcţiei $f(x,y)$ va exista dacă şi numai dacă şirul $\left(f(x_n,y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este un şir fundamental (pentru orice alegere a şirurilor $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$) care se mai poate scrie şi altfel:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall\ (x_m,y_m) \in B_\delta \setminus \{(x_0,y_0)\}$, ce satisface relaţia: $\sqrt{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2} < \delta$ să avem: $|f(x_n,y_n) - f(x_m,y_m)| < \varepsilon$.

CUPRINS

Continuitatea unei funcţii multivariabile

Derivata unei funcţii multivariabile

Integrala unei funcţii multivariabile

Curbe în $\mathbb{R}^n$

Fie $\mathbb{R}^n$ spaţiul euclidian canonic cu n dimensiuni. O funcţie diferenţiabilă $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$, unde I este un interval, se numeşte *curbă* şi se notează cu α.
Uneori numai imaginea $\alpha(I)$ este numită curbă.

Un punct $P \in \alpha(I)$ se numeşte *simplu* dacă există o singură valoare a lui $t \in I$ astfel încât $\alpha(t) = P$.
O funcţie diferenţiabilă şi injectivă $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *curbă simplă* deoarece ipoteza de injectivitate asigură faptul că $\alpha(I)$ posedă numai puncte simple.

Fie curba $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t, 1 + \cos t, \sin t + \cos^2 t, \sin^2 t)$.
Să se arate că restricţia la $[0, 2\pi)$ este o curbă simplă.

Restricţia $\alpha: [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^4$ este injectivă. Într-adevăr, din $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \sin t_1 = \sin t_2 \\ 1 + \cos t_1 = 1 + \cos t_2 \end{cases}$$

care are soluţia unică $t_1 = t_2$.

O curbă $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *periodică* dacă există un număr $T > 0$ astfel încât $t + T \in I$, $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, $\forall\, t \in I$.
Cel mai mic număr $T > 0$ care are această proprietate se numeşte *perioada* lui α.

Fie curba $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t, 1 + \cos t, \sin t + \cos^2 t, \sin^2 t)$.
Să se arate că este o curbă periodică.

Deoarece funcţiile $\sin t$ şi $\cos t$ sunt periodice, de perioadă 2π, rezultă $\alpha(t + 2\pi) = \alpha(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

ECUATII DIFERENTIALE

Prin rezultatele teoretice importante, cât şi prin aplicaţiile în diverse domenii, studiul ecuaţiilor diferenţiale reprezintă un capitol important al analizei matematice.
O ecuaţie diferenţială se deosebeşte de o ecuaţie algebrică prin faptul că necunoscuta nu este un număr, ci o funcţie care satisface o anumită egalitate.
Teoria ecuaţiilor diferenţiale are mai multe ramuri:

- *teoria cantitativă*: se ocupă de rezolvarea analitică a ecuaţiilor. Sunt precizate tipurile de ecuaţii şi tehnicile de rezolvare a acestora.
- *teoria calitativă*: încearcă se deducă proprietăţile soluţiilor, chiar dacă expresia analitică a acestora nu poate fi cunoscută.
- *metode numerice*: sunt tehnici prin care valorile soluţiilor ecuaţiei sunt aproximate numeric.

Resurse:
Matematici speciale (Dana Constantinescu)

Ecuatii cu derivate partiale de ordinul al doilea (Crăciun)

Capitole de matematici speciale (Crăciun)

Manual-Ecuatii-Diferentiale-Teorie-Si-Ex-Rezolvate (Păltineanu&Matei)

CALCUL VARIATIONAL

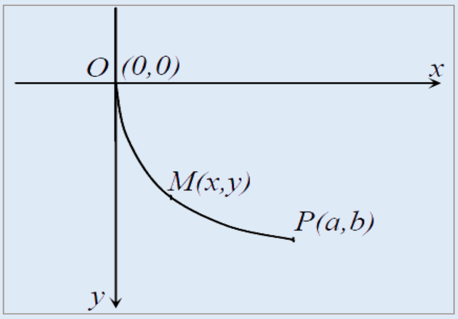
Resurse:

- Calcul variaţional (EduManager.ro)
- Calcul variaţional (civile.utcb.ro)
- Matematici speciale (Zevedei)

Introducere

Calculul variaţional se ocupă cu studiul extremelor pentru o clasă specială de funcţii numite *funcţionale*.
EULER (1744) şi **LAGRANGE** (1760) sunt printre cei care au adus contribuţii decisive în acest domeniu.
În continuare prezentăm câteva probleme ale calculului variaţional.

Curba cu cea mai rapidă coborâre (problema brahistocronei). Problema a fost formulată de **JOHANN BERNOULLI** în 1696, iar de rezolvarea acesteia s-au ocupat fraţii **JOHANN** şi **JACOB BERNOULLI**, **NEWTON**, **LEIBNIZ**, **L'HOSPITAL**.
Prin brahistocronă se înţelege traiectoria pe care un corp, aflat într-un câmp gravitaţional, se deplasează între două puncte date şi realizează un timp minim de deplasare. Aşadar, dintre toate punctele aflate într-un plan vertical şi trecând prin punctele fixe $O(0,0)$ şi $P(a,b)$, cu P mai jos decât O, să se determine acea curbă pentru care timpul de coborâre din O în P al unui punct material greu, fără frecare, să fie minim.
Pentru rezolvare, vom orienta axa Oy pe verticală în jos. Fie $y = y(x),\ x \in [0,a], y(0) = 0, y(a) = b,\ a,b > 0$, curba căutată.
Fie v viteza de deplasare a punctului material, deci $v = \sqrt{2gy} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, unde $\mathrm{d}s$ este lungimea arcului OM.



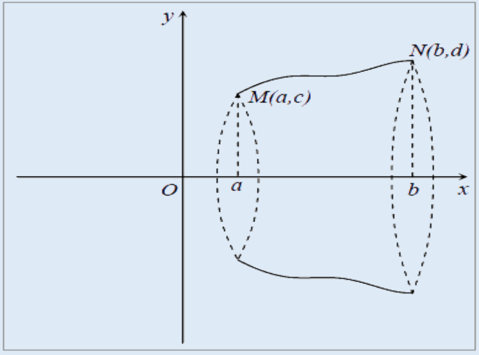
Atunci $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}}$.
Prin urmare, dacă T este timpul necesar pentru ca punctul material să ajungă în punctul P, vom avea:

$$T = \int_{\overset{\frown}{OP}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pentru rezolvarea acestei probleme, se studiază *funcţionala-timp* $\boldsymbol{T}: X \to \mathbb{R}$, unde $X = C^1([0,a];\mathbb{R})$ şi

$$\boldsymbol{T}(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,\mathrm{d}x\,, \forall\, y \in X\,.$$

Problema suprafeţei de rotaţie minimă constă în determinarea unei curbe $y = y(x),\ x \in [a,b], y(a) = c, y(b) = d$, cu proprietatea că aria suprafeţei de rotaţie a graficului în jurul axei Ox este minimă.



După cum se cunoaşte, expresia acestei arii este:

$$A = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)}\mathrm{d}x.$$

În acest caz, pe $X = C^1([a,b];\mathbb{R})$ se defineşte *funcţionala-arie* $\boldsymbol{A}: X \to \mathbb{R}$ prin:

$$\boldsymbol{A}(y) = \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)}\mathrm{d}x \,, \qquad \forall y \in X \,.$$

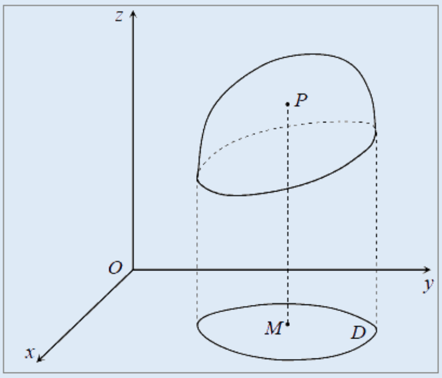
Mai general, pe $X = C^1([a,b];\mathbb{R})$ putem considera funcţionalele de tipul:

$$\boldsymbol{F}(y) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\mathrm{d}x \,,$$

unde $\boldsymbol{F}$ este o funcţie continuă pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, iar y este o funcţie oarecare de clasă C^1 pe $[a,b]$, cu proprietatea că $\big(x, y(x), y'(x)\big) \in \Omega \,,\ \forall\, x \in [a,b]$.

<u>Echilibrul unei membrane deformate</u> O membrană elastică în stare de repaus are forma domeniului $D \subset xOy$. Fie C frontiera lui D. Deformăm conturul C al membranei în direcţia perpendiculară pe planul xOy şi notăm cu $u(x,y)$ deplasarea (deformaţia) unui punct oarecare $M(x,y) \in D$. Se cere să se determine poziţia de echilibru a membranei când se cunoaşte deformarea conturului acesteia. Aria conturului membranei deformate va fi:

$$\iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \,.$$



Dacă deplasările sunt mici, aproximăm această arie cu:

$$\iint_D (1 + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2))\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \,.$$

Rezultă că variaţia ariei suprafeţei deformate este:

$$\frac{1}{2}\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \,.$$

Se admite că energia potenţială a membranei deformate este proporţională cu creşterea ariei sale. prin urmare energia potenţială de deformaţie E este:

$$E = \frac{\mu}{2}\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \,, \qquad\qquad (1)$$

unde μ este o constantă care exprimă calităţile elastice ale membranei. Presupunem că se cunosc deplasările punctelor de pe contur, deci că:

$$u\Big|_C = \varphi(x,y), \qquad (2)$$

φ fiind o funcţie cunoscută.
Poziţia de echilibru se realizează când energia potenţială este minimă. Se obţine astfel următoarea problemă variaţională: Dintre toate funcţiile $u \in \mathcal{C}^1(C)$ care satisfac condiţia (2), să se determine acea funcţie pentru care integrala (1) devine minimă.

Problema echilibrului membranei deformate care ocupă domeniul mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$ ne conduce la considerarea *funcţionalei-energie*:

$$\boldsymbol{E}(u) = \iint_D \left(u_x^2 + u_y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

cunoscută sub numele de *integrala energiei* sau *integrala* **DIRICHLET** a funcţiei $u: D \to \mathbb{R}$.
Mai general, pe $X = \mathcal{C}^1(D;\mathbb{R})$ putem considera funcţionalele de tipul:

$$\boldsymbol{F}(z) = \int_a^b F\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

unde F este o funcţie continuă de cinci variabile reale, definită pe mulţimea

$$\left\{\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) \in \mathbb{R}^5\,;\;\; (x,y) \in D\right\},$$

z fiind o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul D.

Extreme ale funcţionalelor

■ Se numeşte *funcţională* o aplicaţie definită pe un spaţiu liniar X, sau pe o submulţime a acestuia, cu valori în corpul scalarilor peste care este definit spaţiul liniar X.

Observaţie. Funcţionala este de fapt o funcţie al cărei domeniu de definiţie este o mulţime de funcţii şi al cărei codomeniu este o mulţime de numere ("scalari").

Se numeşte *distanţă* pe mulţimea X orice aplicaţie d definită pe $X \times X$ cu valori reale pozitive, $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$, care satisface proprietăţile:
D_1 : $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \ (x,y \in X)$;
D_2 : $d(x,y) = d(y,x), \forall\, x,y \in X$;
D_3 : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \ \forall\, x,y,z \in X$.
Se numeşte *şir CAUCHY* în spaţiul metric (X,d) un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente ale lui X care satisface proprietatea:
$\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \ \forall\, n,m \geq n_\varepsilon$.
Se numeşte *spaţiu complet* un spaţiu liniar în care orice şir CAUCHY este convergent către un element al spaţiului.
Se numeşte *spaţiu BANACH* un spaţiu liniar normat şi metric complet (completitudinea este deci asigurată în raport cu metrica).
Se numeşte *seminormă* o funcţie cu valori reale $p: X \to \mathbb{R}$, care satisface proprietăţile:
(SN_1): $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall\, x,y \in X$;
(SN_2): $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \ \forall\, x,y \in X$ şi λ un scalar nenul.
O normă se notează de obicei astfel: $p(x) \overset{not}{=} \|n\|$.

Spunem că funcţionala $J(y)$ este *diferenţiabilă* în y dacă diferenţa $J(y+h) - J(y)$ se poate scrie astfel:
$$J(y+h) - J(y) = \delta(y,h,J) + r(y,h,J),$$
unde $\delta(y,h,J)$ este o funcţională liniară în h:
$$\delta(y, \alpha h_1 + \beta h_2, J) = \alpha\, \delta(y,h_1,J) + \beta \delta(y,h_2,J),$$
cu α, β doi scalari, iar $r(y,h,J)$ este o funcţională care satisface condiţia:
$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{r(y,h,J)}{\|h\|}.$$
δ se numeşte *diferenţiala* funcţionalei $J(y)$.

Funcţionala $J(y)$ este diferenţiabilă în y dacă există $\delta(y,h,J)$ o funcţională liniară în h, astfel încât:
$$\lim_{\|h\|\to 0} [J(y+h) - \delta(y,h,J)] = 0.$$

■ Dacă funcţionala $\delta(y,h,J)$ există, atunci acesta este unică.

Demonstraţia se face prin reducere la absurd.

■ Fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ şi $\boldsymbol{F}: A \to \mathbb{R}$ o funcţională. Un element $y_0 \in A$ se numeşte punct de *minim local* (respectiv *maxim local*) pentru $\boldsymbol{F}$, dacă există $r > 0$ astfel încât pentru orice $y \in A$ care satisface $\|y - y_0\| < r$, rezultă $\boldsymbol{F}(y) \geq \boldsymbol{F}(y_0)$ (respectiv $\boldsymbol{F}(y) \leq \boldsymbol{F}(y_0)$). Un punct de minim local sau de maxim local se numeşte punct de *extrem local*. Dacă inegalităţile de mai sus au loc pentru orice $y \in A$, atunci se poate vorbi de punct de *minim global* (respectiv *maxim global*) sau *extrem global*.

În continuare, fi X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulţime deschisă, $\boldsymbol{F}: A \to \mathbb{R}$ o funcţională, $y_0 \in A$ şi $h \in X, h \neq 0_X$, un element fixat. Multimea A fiind deschisă, există $r > 0$ astfel încât $B(y_0, r) \subset A$. Dacă $t \in \mathbb{R}$, atunci elementul $y = y_0 + th \in B(y_0, r)$ dacă şi numai dacă $\|y - y_0\| < r$, deci dacă şi numai dacă $|t| < \frac{r}{\|h\|}$. În consecinţă, putem defini funcţia reală:
$$\varphi: \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_h(t) = \boldsymbol{F}(y_0 + th). \qquad (1)$$

Fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulţime deschisă, $\boldsymbol{F}: A \to \mathbb{R}$ o funcţională şi $y_0 \in A$. Se spune că F *admite variaţia întâi în y_0 pe direcţia unui vector nenul $h \in X$*, dacă funcţia φ_h dată de (1) este derivabilă în punctul $t = 0$. În acest caz, ${\varphi'}_h(0)$ se numeşte *variaţia întâi a lui $\boldsymbol{F}$ în y_0 pe direcţia lui h* şi se notează cu $\delta_h \boldsymbol{F}(y_0)$.
Vectorul h se numeşte *variaţie* a argumentului funcţionalei $\boldsymbol{F}$. Un punct $y_0 \in A$ cu proprietatea că $\delta_h \boldsymbol{F}(y_0) = 0\,, \ \forall\, h \in X$ se numeşte *punct critic (staţionar)* al funcţionalei $\boldsymbol{F}$.
Prin urmare:

$$\delta_h \boldsymbol{F}(y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_h(h) - \varphi_h(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{F}(y_0 + th) - \boldsymbol{F}(y_0)}{t}\ .$$

Dacă $h = 0$, atunci punem: $\delta_h \boldsymbol{F}(y_0) = 0.$

Observaţie. În particular, fie $X = \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ şi $s = \frac{h}{\|h\|}$ versorul lui h. Atunci:

$$\delta_h \boldsymbol{F}(y_0) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}s}(y_0),$$

unde $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}s}(y_0)$ este derivata lui $\boldsymbol{F}$ după direcţia lui s în y_0. Aşadar, noţiunea de variaţie întâi este o extindere a conceptului de derivată după o direcţie.

(*Teorema lui* ***Fermat***). Fie X un spaţiu vectorial normat $A \subset X$ o mulţime deschisă şi $\boldsymbol{F}: A \to \mathbb{R}$ o funcţională. Dacă $y_0 \in A$ este un punct de extrem local pentru $\boldsymbol{F}$ şi dacă $\boldsymbol{F}$ admite variaţia întâi în y_0 pe orice direcţie, atunci y_0 este punct critic al lui $\boldsymbol{F}$, adică:

$$\delta_h \boldsymbol{F}(y_0) = 0\,, \qquad \forall\, h \in X. \qquad (2)$$

Egalitatea (2) este evidentă penbtru $h = 0_X$. Să presupunem acum că $h \neq 0_X$ şi că y_0 este punct de minim local, în cazul în care y_0 este punct de maxim local raţionamentul fiind similar.
Conforma definiţiei, există $r > 0$ astfel încât pentru orice $y \in A \cap B(y_0, r)$ are loc $\boldsymbol{F}(y) \geq \boldsymbol{F}(y_0)$. Mulţimea A fiind deschisă, putem alege $r > 0$ suficient de mic astfel încât $B(y_0, r) \subset A$. Aşadar, pentru orice $y \in B(y_0, r)$ avem $\boldsymbol{F}(y) \geq \boldsymbol{F}(y_0)$. Deoarece pentru $|t| < \frac{r}{\|h\|}$, $y = y_0 + th \in B(y_0, r)$, rezultă că pentru orice $t \in \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right)$ are loc inegalitatea $\boldsymbol{F}(y_0 + th) \geq \boldsymbol{F}(y_0)$ care, ţinând seama de (1), se mai scrie sub forma $\varphi_h(t) \geq \varphi_h(0)$, $\forall\, t \in \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right)$. Conform teoremei clasice a lui Fermat pentru funcţii de o variabilă reală, rezultă că $\varphi_h'(0) = 0$ sau, echivalent, $\delta_h \boldsymbol{F}(y_0) = 0$.

Funcţionale de tipul $\boldsymbol{F}(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$

■ Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă, $F: D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Pe mulţimea:

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1\,(I;\mathbb{R}) \mid \big(x,\ \ y(x),\ y'(x)\big) \in D\,,\ \ \forall x \in I\}$$

se defineşte funcţionala $\boldsymbol{F}: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{F}(y) = \int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x\ , \qquad y \in \mathcal{D}\,.$$

Mulţimea $\mathcal{D}$ este deschisă în spaţiul **Banach** $\mathcal{C}^1\,(I;\mathbb{R})$.

Fie $y_0 \in \mathcal{D}$ oarecare. Cum funcţia vectorială

$$x \mapsto \big(x, y_0(x), y_0'(x)\big): I \to D \subset \mathbb{R}^3$$

este continuă, rezultă că mulţimea $K = \big\{\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)\,;\ \ x \in I\ \big\} \subset D$ este compactă. Fie $r = d(x, \boldsymbol{\mathcal{C}}_D) = \inf\{d(M,N);\ \ M \in \mathbb{K}\,, N \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_D\}$. Deoarece $\mathbb{K} \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}_D = \emptyset$, $\mathbb{K}$ este compactă şi $\boldsymbol{\mathcal{C}}_D$ este închisă, rezultă că $r > 0$. (Demonstraţia acestui fapt este mai dificilă şi nu a fost inclusă aici.)

■ Dacă funcţionala $r(y, h, J)$ se poate reprezenta sub forma:

$$r(y,h,J) = \frac{1}{2}\delta_2(y,h,J) + r_2(y,h,J),$$

unde: $\delta_2(y, th, J) = t^2\delta_2(y,h,J)$ şi $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\frac{r_2(y,h,J)}{\|h\|^2} = 0,$

atunci funcţionala $\delta_2(y,h,J)$ se numeşte *diferenţiala secundă* a funcţionalei $J(y)$.

ANALIZA MATEMATICA ABSTRACTA

Spaţii topologice

■ Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte *topologie pe X* o familie de submulţimi ale lui X notată τ care verifică axiomele:

T_1 $\emptyset, X \in \tau$.

T_2 $D_1, D_2 \in \tau \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \tau$.

T_3 $D_i \in \tau \ \ \forall\, i \in I \ \Rightarrow \ \bigcup_{i\in I} D_i \in \tau$.

Dubletul (X, τ) este numit *spaţiu tolopogic*. Dacă nu există confuzii, spaţiul topologic mai poate fi notat şi X.

1^o Fie X o mulţime nevidă şi $\tau_g = \{\emptyset, X\}$. Atunci τ_g este o topologie pe X.

2^o Fie X o mulţime nevidă şi $\tau_d = \mathcal{P}(X)$. Atunci τ_d este o topologie pe X.

Demonstraţia este simplă.

Observaţie. τ_g se numeşte *topologia grosieră* pe X, iar τ_d *topologia discretă*.

■ Fie X o mulţime total ordonată cu cel puţin două elemente. Notăm:

$$(a, b) = \{\, x \in X : \ a < x < b \,\};$$
$$(\leftarrow, a) = \{\, x \in X : \ x < a \,\};$$
$$(a, \rightarrow) = \{\, x \in X : \ x > a \,\},$$

unde $a, b \in X$. Atunci mulţimea care conţine mulţimea vidă $\emptyset$ şi familia submulţimilor $D \subseteq X$ cu proprietatea că pentru orice $x \in D$ există o mulţime V de unul din cele trei tipuri de mai sus astfel încât $x \in V \subset D$, este o topologie.

Demonstraţia este simplă.

Observaţie. Această topologie se numeşte *topologia ordinii* asociată mulţimii ordonate X.

■ Fie X o mulţime nevidă. o aplicaţie $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *distanţă* sau *metrică* pe X dacă au loc:

(D_1) $d(x,y) \geq 0,\ \forall\, x,y \in X$; $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (*pozitivitatea distanţei*);

(D_2) $d(x,y) = d(y,x),\ \forall\, x,y \in X$ (*simetria*);

(D_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall\, x,y,z \in X$ (*inegalitatea triunghiului*).

Perehea (X,d) se numeşte *spaţiu metric*.

Într-un spaţiu metric (X,d) au loc:

1^o $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + (x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n),\ \forall\, x_1,x_2,\ldots,x-n \in X$;

2^o $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y),\ \forall\, x,y,z \in X$;

3^o $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y'),\ \forall\, x,y,x',y' \in X$.

1^o

2^o

3^o

■ Fie X un spaţiu vectorial real. Se numeşte *normă* pe X o funcţie $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+$, cu proprietăţile:

1^o $\|x\| = 0 \iff x = 0_X$;

2^o $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X$;

3^o $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x,y \in X$ (*inegalitatea triunghiului*).

Spaţiul vectorial X înzestrat cu o normă se numeşte *spaţiu vectorial normat*.

Fie X un spaţiu vectorial normat, $y_0 \in X$ şi $r > 0$. Se numeşte *bilă deschisă cu centrul în z_0 şi de rază r* mulţimea:

$$B(y_0,r) = \{y \in Y \mid |y - y_0| < r\}.$$

Mulţimea $A \subset X$ se numeşte *deschisă* dacă $\forall\, y \in A$, există $r > 0$ astfel încât $B(y,r) \subset A$.

Fie $(y_n)_n \subset X$. Şirul $(y_n)_n$ *converge* la $y \in X$ şi se notează $y_n \to y$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$.

Şirul $(y_n)_n$ se numeşte *şir fundamental* sau *şir **Cauchy*** dacă şi numai dacă $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|y_n - y_m\| = 0$.

Un spaţiu vectorial normat în care orice şir **Cauchy** este convergent se numeşte *spaţiu complet* sau *spaţiu **Banach***.

Alte detalii aici.

Alina Gavriluţ - Analiză

Calcul diferential pentru functii de mai multe variabile (Florescu)

Pentru spaţii metrice detalii aici.

Brezis – Analiză funcţională

Spaţii topologice. Exerciţii

■ Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$ un interval şi $n \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze că spaţiul vectorial real $\mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ al funcţiilor $y: I \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^n$, înzestrat cu norma:

$$\|y\| = \sup_{x\in I} |y(x)| + \sup_{x\in I} |y'(x)| + \cdots + \sup_{x\in I} \left|y^{(n))}(x)\right| ,$$

este un spaţiu vectorial normat.

■ Spaţiul vectorial real $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^2)$ al funcţiilor $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(x) = \big(y(x),\ z(x)\big)$, unde $y, z \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$, înzestrat cu norma:

$$\|\gamma\| = \sup_{x\in I} \sqrt{y^2(x) + z^2(x)} + \sup_{x\in I} \sqrt{y'^2(x) + z'^2(x)} ,$$

este un spaţiu vectorial normat şi spaţiu **Banach**.

■ Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit de o curbă închisă, netedă pe porţiuni. Spaţiul $\mathcal{C}^1(\overline{D}; \mathbb{R})$ este spaţiu vectorial normat şi spaţiu **Banach** în raport cu norma:

$$\|z\| = \sup_{x,y\in \overline{D}} |z(x,y)| + \sup_{x,y\in \overline{D}} \left|\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right| + \sup_{x,y\in \overline{D}} \left|\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right| , \ \forall\, z \in \mathcal{C}^1(\overline{D}; \mathbb{R}) .$$

■ Pe spaţiul $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ al funcţiilor continue pe $[a, b]$ se poate defini *norma **Cebîşev***:

$$\|g\|_C = \sup\{|g(x)|;\ \ x \in [a, b]\}, \qquad \forall\, g \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}).$$

Să se demonstreze că spaţiul $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ înzestrat cu norma ***Cebîşev*** este un spaţiu **Banach**.

Spaţii metrice

■ Se consideră funcţia: $d: M \times M \to [0, \infty)$,
unde M este o mulţime nevidă, care verifică următoarele trei axiome pentru orice $x, y, z \in M$:
(M_1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
(M_2) $d(x, y) = d(y, x)$;
(M_3) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$. (*inegalitatea triunghiului*)
O astfel de funcţie d se numeşte *metrică* (sau *distanţă*) pe M (pentru M). Mulţimea M înzestrată cu o metrică se numeşte *spaţiu metric*; pentru $x, y \in M$ numărul pozitiv $d(x, y)$ se numeşte *distanţă* între x şi y, care se numesc *puncte* din spaţiul metric M.

Observaţii.
1^o Metrica este o generalizare a noţiunii de distanţă pe $\mathbb{R}$, care este definită ca $d(x, y) = |x - y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
În $\mathbb{R}^2$ distanţa dintre punctele de coordonate $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ este $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
2^o Pe o aceeaşi mulţime se pot defini mai multe metrici. În raport cu fiecare, mulţimea devine un alt spaţiu, cu proprietăţi specifice.

Fie X o mulţime nevidă. Definim:
$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \ne y \\ 0, & \text{dacă } x = y \end{cases}.$$
Să se arate că d este o distanţă pe X, numită *metrica discretă*.

■ Fie (X, d) un spaţiu metric, $a \in X$ un punct şi fie $r > 0$. Mulţimea:
$$S(a, r) = \{x \in X :\ d(a, x) < r\}$$
se numeşte *bilă deschisă* de rază r şi cu centru în a.

Să se arată că funcţia:
$$d: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+, \qquad d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$$
defineşte un spaţiu metric pe $\mathbb{N}^*$. Să se descrie bila cu centrul în 1 şi rază 1 şi bila de centru 1 şi rază 1/10.

$$S(1, 1) = \left\{n \in \mathbb{N}^* :\ \left|1 - \frac{1}{n}\right| < 1\right\} = \mathbb{N}^*, \qquad S\left(1, \frac{1}{10}\right) = \left\{n \in \mathbb{N}^* :\ \left|1 - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{10}\right\} = \{1\}.$$

■ Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Funcţia:
$$d: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+, \qquad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + \left(x_p - y_p\right)^2},$$
pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_p), y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ este un spaţiu metric pe $\mathbb{R}^p$ (numit *spaţiul euclidian* $\mathbb{R}^p$).

Observaţii.
1^o Această propoziţie defineşte *spaţiul euclidian* $\mathbb{R}^p$. Orice vector din $\mathbb{R}^p$ are astfel o lungime şi anume distanţa sa până la origine.
2^o Pentru $p = 2$,
$$S\big((0,0), 1\big) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ d\big((0,0),\ (x, y)\big) = \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \right\},$$
deci bila cu centrul în $(0, 0)$ şi de rază 1 este un disc deschis.
3^o Pentru $p = 3$,
$$S\big((0,0,0), 1\big) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \},$$
este ''mingea'' cu centrul în $(0, 0, 0)$ şi de rază 1.

■ Fie V un spaţiu liniar peste corpul numerelor reale. O funcţie $\nu: V \to [0, \infty)$ este numită *normă* pe V dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:
(N_1) $\nu(v) = 0$ dacă şi numai dacă $v = 0$.
(N_2) $\nu(\lambda v) = |\lambda| \cdot \nu(v)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi orice $v \in V$.
(N_3) $\nu(u + v) \le \nu(u) + \nu(v)$ pentru orice $u, v \in V$. (*inegalitatea triunghiului*).

Un spaţiu liniar înzestrat cu o normă se numeşte *spaţiu liniar normat*. O notaţie uzuală pentru norma ν este $\|\cdot\|$.

Observaţie. Pentru spaţiile liniare $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$, valoarea absolută (modulul) $|\cdot|$ poate fi considerată ca normă.

Fie $(V, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi:

$$d(x,y) \coloneqq \|x-y\|, \qquad x,y \in V.$$

Atunci (V,d) este un spaţiu metric. De asemenea, dacă M este o submulţime nevidă a lui V, atunci $(M, d_{|M})$ este un spaţiu metric.

Evident d este o funcţie cu valori pozitive. Avem:

$$d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x-y=0 \iff x=y,$$

deci (M_1) este îndeplinită. Pe de altă parte, aplicând (N_2) pentru $\lambda = -1$, obţinem:

$$d(x,y) = \|x-y\| = -\|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x).$$

În baza lui (N_3) putem scrie:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

■ Fie V un spaţiu liniar peste corpul numerelor reale. O funcţie $\mu: V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte *produs scalar* pe V dacă satisface următoarele axiome:

(I_1) $\mu(x+y, z) = \mu(x,y) + \mu(x,z), \ \forall\, x,y,z \in V$.

(I_2) $\mu(x,y) = \mu(y,x), \ \forall\, x,y \in V$.

(I_3) $\mu(\alpha x, y) = \alpha\, \mu(x,y), \ \forall\, x,y \in V, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

(I_4) $\mu(x,x) \geq 0, \ \forall\, x \in V$ şi $\mu(x,x) = 0 \iff x = 0$.

Produsul scalar al vectorilor $x,y \in V$ va fi notat prin $\langle x,y \rangle$ sau mai simplu prin $x \cdot y$.

Observaţii.

1^o Produsul scalar real este o aplicaţie *biliniară*, adică este liniar în ambele variabile.

2^o Axiomele $(I_1) - (I_3)$ ne asigură că:

$$\langle \alpha\, x + \beta\, y, \ \alpha'\, x' + \beta'\, y' \rangle = \alpha\alpha'\langle x,x'\rangle + \alpha\beta'\langle x,y'\rangle + \beta\alpha'\langle y,x'\rangle + \beta\beta'\langle y,y\rangle, \ \forall\, \alpha,\beta\ \alpha',\beta' \in \mathbb{R}, \ \forall\ x,y,x',y' \in V.$$

Fie $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi $x,y \in V$. Atunci:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,y\rangle}, \qquad (1)$$ (*inegalitatea lui* ***Schwarz***)

egalitatea având loc dacă şi numai dacă unul intre cei doi vectori este multiplul scalar al celuilalt.

Dacă $\langle x,x\rangle = 0$ atunci inegalitatea (1) este evidentă. Admitem că $\langle x,x\rangle \neq 0$. În particular, vectorii x,y sunt nenuli.

Notăm: $u(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|}$ şi observăm că $u(x,y)^2 = 1$ şi:

$$\langle x, \ u(x,y)\, y\rangle = \langle u(x,y)x, \ y\rangle = |\langle x,y\rangle|.$$

Prin urmare, pentru orice $s \in \mathbb{R}$, avem că:

$$0 \leq \langle sx + u(x,y)y, \ sx + u(x,y)y\rangle = s^2\langle x,x\rangle + 2s|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \qquad (2)$$

Având în vedere că $\langle x,x\rangle \neq 0$, condiţia (2) ne spune că discriminantul trinomului din dreapta semnului egal este negativ şi rezultă (1).

Pe de altă parte, dacă inegalitatea (2) este strictă pentru orice $s \in \mathbb{R}$ atunci discriminantul trinomului menţionat anterior trebuie să fie strict negativ. Cu alte cuvinte, egalitatea în (1) impune egalitatea în (2) pentru cel puţin un număr real s. Acest s verifică şi $sx = -u(x,y)y$, fapt care arată că egalitatea în (1) se realizează doar dacă unul dintre vectori este multiplu cu un scalar al celuilalt.

Observaţie. Inegalitatea lui **Schwarz** este un caz particular al inegalităţii **Cauchy-Schwarz**:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ şi $1 \leq i \leq n$.

■ În spaţiul liniar $\mathbb{R}^p$, peste corpul $\mathbb{R}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$, se consideră:

$$\langle x,y\rangle \coloneqq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_py_p,$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p), \ y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. Să se demonstreze că acesta este un produs scalar (*produsul scalar euclidian*).

■ Fie $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ un spaţiu cu un produs scalar. Spaţiul V poate fi normat (deci se poate metriza) în următorul mod (deci $(V, \|\cdot\|)$ devine spaţiu normat):

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,, \qquad x \in V\,.$$

Dacă $\|x\| = 0$ atunci $\langle x, x\rangle = 0$ deci $x = 0$. În plus, este clar că $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$, pentru orice $x \in V$. Pentru a deduce axioma (N_2), se procedează la fel. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda\, x, \lambda\, x\rangle} = \sqrt{(\lambda)^2\, \langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \langle x, x\rangle\,.$$

Pentru a deduce inegalitatea triunghiului, utilizăm inegalitatea lui **Schwarz**:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\ \ x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\langle x, y\rangle \ \leq\ \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\ \ .$$

Observaţie. Conform propoziţiilor anterioare, produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^p$ introduce o normă euclidiană, care la rândul acesteia introduce o metrică euclidiană pe $\mathbb{R}^p$.

■ Dacă $(V, \langle\,\cdot,\ \cdot\,\rangle)$ este un spaţiu cu produs scalar, atunci:

$$\|x+y\|^2 + \ \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (\textit{legea paralelogramului})$$

pentru orice $x, y \in V$.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\ \ x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\langle x, y\rangle$$
$$\|x-y\|^2 = \langle x+y,\ \ x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\langle x, y\rangle$$

Se adună cele două relaţii.

Observaţie. Teorema stabileşte că, într-un spaţiu cu produs scalar, înzestrat cu norma sa naturală, suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor sale. Un corolar este identitatea:

$$\frac{1}{2}[\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle] = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 + \ \|x-y\|^2]\,.$$

■ Se consideră următoarele funcţii definite pe $\mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}_+$ prin:

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2\right)^{1/2}\,, \qquad \|x\|_1 = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Funcţiile $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sunt norme pe $\mathbb{R}^n$ (numite *norme fundamentale pe* $\mathbb{R}^n$). Avem şi relaţia:

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \ \|x\|_2\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,.$$

■ Fie $\mathcal{C}^0[a, b]$ spaţiul liniar al tuturor funcţiilor continue de la $[a, b]$ la $\mathbb{R}$. Definim:

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x\ , \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{C}^0[a, b].$$

Acesta este un produs scalar pe $\mathcal{C}^0[a, b]$, numit *produs scalar uzual* şi care introduce norma:

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x\ , \qquad f \in \mathcal{C}^0[a, b]\,,$$

(*norma convergenţei în media pătratică*)

Avem:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) f(x) \mathrm{d}x = \langle g, f\rangle\,.$$

$$\langle \lambda f_1 + \mu f_2, g\rangle = \int_a^b (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)\ g(x) \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f_1(x)\ g(x) \mathrm{d}x + \mu \int_a^b f_2(x)\ g(x) \mathrm{d}x = \lambda\langle f_1, g\rangle + \mu\langle f_2, g\rangle\,.$$

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x \geq 0\,.$$

Să arătăm că dacă f este continuă şi $\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x = 0$, atunci $f(x) = 0$ pentru orice x. De aceea presupunem că f nu este identic nulă.

Dacă $f \neq 0$, atunci $\exists\, x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f^2(x_0) > 0$. Cum f este continuă, rezultă că şi f^2 este continuă pe $[a, b]$. Atunci există o vecinătate $\mathcal{V}_{x_0} \subset [a, b]$ a punctului x_0 astfel încât $f^2(x) > \frac{1}{2} f^2(x_0)$, $\ \forall\, x \in \mathcal{V}_{x_0}$. Fie $\mathcal{V}_{x_0} = (\alpha, \beta)$. Obţinem contradicţia:

$$0=\int_{a}^{b} f^2(x)\mathrm{d}x \geq \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} f^2(x_0)(\beta-\alpha) > 0\,.$$

Observaţie. În acest caz, inegalitatea **CAUCHY-SCHWARZ** devine:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Fie E un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial. Se numeşte *produs scalar complex* sau *produs scalar hermitic* pe E orice funcţie $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{C}$ care satisface următoarele axiome:

1^o $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ $\forall\, x,y\in E$ (*hermicitate*);

2^o $\langle \lambda x_1+\mu x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1,y\rangle+\mu\langle x_2,y\rangle$, $\forall\, x_1,x_2,y\in E$, $\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ (*liniaritate în primul argument*);

3^o $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\forall\, x\in E$ şi $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$.

Fie $E=\{f \mid f\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C}, f \text{ continuă}\}$. Să se arate că

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

defineşte un produs scalar complex pe $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial E.

Avem:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \overline{\overline{g(x)}f(x)}\mathrm{d}x = \overline{\langle g,f\rangle}.$$

Dacă $f,g\in E$, $f=\mathrm{e}^{ikx}$, $g=\mathrm{e}^{ilx}$, atunci:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ikx}\overline{\mathrm{e}^{ilx}}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ikx-ilx}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k-l)x}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos\big((k-l)x\big)\,\mathrm{d}x + i\int_0^{2\pi} \sin\big((k-l)x\big)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Două elemente x,y dintr-un spaţiu prehilbertian E se numesc *ortogonale* dacă produsul lor scalar este nul, în care caz se notează $x\perp y$.

■ Fie (X,d) un spaţiu metric. Vom spune că mulţimea $G\subset X$ este *deschisă* dacă aceasta este nevidă sau dacă pentru orice $a\in G$ există $r>0$ astfel încât $S(a,r)\subset G$.

Să se arate că mulţimea $\mathcal{T}_d$ a tuturor mulţimlor deschise din spaţiul (X,d) este o topologie pe X, numită *topologia indusă de metrica d*.

■ Fie (X,d) un spaţiu metric. O mulţime $V\subset X$ se numeşte *vecinătate* a punctului $a\in X$ şi notăm $V\in\mathcal{V}_x$ dacă există $r>0$ astfel încât $S(a,r)\subset V$. S-a notat cu $\mathcal{V}_x$ *mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului* $x\in X$.

O mulţime $G\subset X$ este deschisă dacă şi numai dacă este vecinătate pentru orice punct al acesteia.

■ Orice spaţiu metric (X,d) are *proprietatea lui* ***HAUSDORFF***, adică pentru orice $x,y\in X$, $x\neq y$ există $V\in\mathcal{V}_x$ şi $U\in\mathcal{V}_y$ astfel încât $U\cap V\neq\emptyset$, adică oricare două puncte diferite au vecinătăţi disjuncte.

Deoarece $x\neq y$, distanţa $r\coloneqq d(x,y)$ este strict pozitivă. Fie $U\coloneqq S(x,r/3)$ şi $V=S(y,r/3)$. Este clar că $\in\mathcal{V}_x$ şi $V\in\mathcal{V}_x$. În plus, dacă ar exista $z\in U\cap V$ atunci din inegalitatea triunghiului deducem:

$$r=d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) < 2\frac{r}{3},$$

care este o contradicţie. Deci $U\cap V=\emptyset$.

■ Fie (X,d) un spaţiu metric, $x\in X$ şi $A\subset X$ o mulţime nevidă. Vom spune că:

- x este *punct aderent* pentru mulţimea A dacă orice vecinătate a lui x intersectează mulţimea A, adică:

$(\forall V)(V \in \mathcal{V}_x \to V \cap A \neq \emptyset)$;

- x este *punct de acumulare* al mulţimii A, dacă:

$$(\forall V)(V \in \mathcal{V}_x \to V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset)\,;$$

- x este *punct izolat* al mulţimii A dacă:

$$(\forall V)(V \in \mathcal{V}_x \text{ şi } V \cap A = \{x\})$$

Mulţimea A se numeşte *închisă* dacă complementara sa $\mathcal{C}(A) := X \setminus A$ este o mulţime deschisă. Vom nota cu $\bar{A}$ mulţimea punctelor aderente lui A, cu $Iz(A)$ mulţimea punctelor sale izolate, iar cu A' mulţimea punctelor sale de acumulare. Aceasta din urmă se mai numeşte şi *derivata mulţimii A*.

Observaţie. Din definiţie rezultă imediat:

- $x \in A'$ dacă şi numai dacă $x \in \bar{A}$ şi $x \notin Iz(A)$.
- $\bar{A} = A' \cup Iz(A)$.
- A este deschisă dacă şi numai dacă $\mathcal{C}(A)$ este mulţime închisă.

Mulţimea F este închisă în spaţiul metric (X,d) dacă şi numai dacă aceasta îşi conţine toate punctele de acumulare (adică dacă $F' \subset F$).

1^o Fie F închisă. Atunci $G \setminus F$ este deschisă, deci este şi vecinătate pentru oricare dintre punctele sale. prin urmare, niciun punct din G nu poate fi punct limită pentru F (deoarece $G \cap F \setminus \{x\}$ este mulţimea vidă). Deci punctele de acumulare ale lui F aparţin lui F, cu alte cuvinte F conţine toate punctele limită pe care le poate avea.
2^o Dacă F îşi conţine punctele limită, atunci pentru orice $x \in X \setminus F$ există o vecinătate deschisă a lui x astfel încât $V_x \cap F \setminus \{x\} = \emptyset$. În particular, $V_x \cap F \subset X \setminus F$. Atunci:

$$X \setminus F = \cup \{V_x\colon\ x \in X \setminus F, V_x \in \mathcal{V}_x, \qquad V_x \in \mathcal{T}_d\}$$

este o mulţime deschisă, fiind reuniunea unei colecţii de mulţimi deschise. Prin urmare, F este mulţime închisă.

■ Fie (X,d) un spaţiu metric şi $\mathcal{T}_d$ topologie pe X generată de d. Atunci:
1^o Mulţimile $\emptyset, X$ aparţin la $\mathcal{T}_d$.
2^o Dacă G_1 şi G_2 aparţin la $\mathcal{T}_d$ atunci şi intersecţia lor $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_d$.
3^o Pentru orice mulţime nevidă de indici $\mathcal{I}$ cu proprietatea că $G_i \in \mathcal{T}_d$ pentru fiecare $i \in \mathcal{I}$, avem că:

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} G_i \in \mathcal{T}_d\,.$$

1^o Mulţimea vidă aparţine (prin definiţie) oricărei topologii, în timp ce X conţine toate bilele deschise, deci $X \in \mathcal{T}_d$.
2^o Fie G_1 şi G_2 două mulţimi din $\mathcal{T}_d$ şi notăm cu G intersecţia lor. Dacă G_1 sau G_2 este mulţimea vidă, atunci şi G este mulţimea vidă.
Analizăm acum cazul când G_1 şi G_2 au intersecţia nevidă. Fie $x \in G$. Atunci $x \in G_1$ şi $x \in G_2$. Din definiţie, există $r_1 > 0$ şi $r_2 > 0$ astfel încât $S(x,r_1) \subset G_1$ şi $S(x,r_2) \subset G_2$. Fie $r := \min\{r_1, r_2\}$. Este clar că $S(x,r)$ este submulţime atât pentru G_1 cât şi pentru G_2. Prin urmare $S(x,r) \subset G$, deci $G \in \mathcal{T}_d$.
3^o Dacă $G = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} G_i = \emptyset$ atunci $G \in \mathcal{T}_d$, iar în caz contrar există $x \in G$ deci există şi $j \in \mathcal{I}$ astfel încât $x \in G_j$. Dar $G_j \in \mathcal{T}_d$, deci există $r > 0$ astfel încât $S(x,r) \subset G_j \subset G$, fapt care probează că $G \in \mathcal{T}_d$.

■ Fie (X,d) un spaţiu metric şi $\mathcal{F}_d$ colecţia tuturor mulţimilor închise ale lui X. Atunci:
1^o Mulţimile $\emptyset, X$ aparţin la $\mathcal{F}_d$.
2^o Dacă F_1 şi F_2 aparţin la $\mathcal{F}_d$ atunci şi reuniunea lor $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{F}_d$.
3^o Pentru orice mulţime nevidă de indici $\mathcal{I}$ cu proprietatea că $F_i \in \mathcal{F}_d$ pentru fiecare $i \in \mathcal{I}$, avem că:

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i \in \mathcal{F}_d\,.$$

Se ţine cont de relaţiile lui **De Morgan** din teoria mulţimilor:

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}A_i\ ,\ \mathcal{C}\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}A_i\,.$$

■ Fie (X,d) un spaţiu metric şi $\mathcal{F}_d$ colecţia tuturor mulţimilor închise ale lui X. Atunci:
1^o Mulţimile $\emptyset, X$ aparţin lui $\mathcal{F}_d$.
2^o Dacă F_1 şi F_2 aparţin la $\mathcal{F}_d$ atunci şi reuniunea lor $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{F}_d$.
3^o Pentru orice mulţime nevidă de indici $\mathcal{I}$ cu proprietatea că $F_i \in \mathcal{F}_d$ pentru fiecare $i \in \mathcal{I}$, avem că:

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i \in \mathcal{F}_d$$

■ Fie (X, d) un spaţiu metric, $A \subset X$ şi $a \in X$.
1^o Punctul a este numit *punct interior* pentru A dacă $A \in \mathcal{V}_a$. Vom nota cu $\mathcal{Int}\,(A)$ mulţimea punctelor interioare ale lui A.
2^o Punctul a se numeşte *punct exterior* al lui A dacă a este punct interior pentru $X \setminus A$. Notăm cu $\mathcal{Ext}(A)$ mulţimea punctelor exterioare ale lui A.
3^o Punctul a se numeşte *punct frontieră* al lui A dacă a este punct aderent atât pentru A cât şi pentru $X \setminus A$. Notăm cu $\mathcal{Fr}(A)$ mulţimea punctelor frontieră ale lui A.

Dacă (X, d) este un spaţiu metric şi A o submulţime nevidă a sa. Atunci:
1^o $\mathcal{Int}(A)$ este cea mai mare submulţime deschisă (în sensul relaţiei e incluziune) conţinută în A.
2^o $\bar{A}$ este cea mai mică mulţime închisă care conţine pe A.
3^o $\mathcal{Fr}(A)$ este o mulţime închisă.

1^o Fie $a \in \mathcal{Int}(A)$. Atunci, din definiţie rezultă că există $r_a > 0$ astfel încât $S(a,r) \subset A$. Cum $S(a,r)$ este deschisă, avem şi $S(a,r) \subset \mathcal{Int}(A)$. Urmează:

$$\mathcal{Int}(A) \subset \bigcup_{a \in \mathcal{Int}(A)} S(a,r) \subset \mathcal{Int}(A),$$

fapt care arată că $\mathcal{Int}(A)$ este o mulţime deschisă (reuniune de mulţimi deschise). Dacă B este o mulţime deschisă inclusă în A, atunci B este vecinătate pentru orice punct al său deci $B \subset \mathcal{Int}(A)$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{Int}(A)$ este cea mai ''largă'' mulţime deschisă conţinută în A.
2^o Avem de arătat că $\bar{A}$ este intersecţia tuturor mulţimilor închise care include mulţimea A. Demonstraţia poate fie realizată în două etape:

- $\bar{A}$ este închisă şi conţine A, caz în care include şi intersecţia despre care s-a discutat anterior.
- $\bar{A}$ este inclusă în intersecţia tuturor mulţimilor închise care include mulţimea A.

Pentru a dovedi acest ultim fapt, fie $x \in \bar{A}$ şi să admitem prin absurd că exsită o mulţime închisă F cu $A \subset F$ şi astfel încât $x \notin F$. Atunci $x \in \mathcal{C}F$ care este o vecinătate deschisă a lui x şi $\mathcal{C}F \subset \mathcal{C}A$. Cu alte cuvinte, $\mathcal{C}F$ este o vecinătate a lui x care nu intersectează mulţimea A, ceea ce contrazie ipoteza $x \in \bar{A}$.
Pentru a finaliza demonstraţia, a rămas să demonstrăm că $\bar{A}$ este o mulţime închisă. Vom arăta că $\bar{A}$ îşi conţine punctele de acumulare şi aplicăm propoziţia Mulţimea F este închisă în spaţiul metric (X, d) dacă şi numai dacă aceasta îşi conţine toate punctele de acumulare (adică dacă $F' \subset F$). Fie $x \in (\bar{A})'$.
Atunci pentru orice vecinătate deschisă V_x a lui x avem că $V_x \cap \bar{A} \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Prin urmare, există $y \in V_x \cap \bar{A}$ cu $y \neq x$. Fiind deschisă, V_x este vecinătte a lui y şi cum $y \in \bar{A}$ trebuie ca $V_x \cap A \neq \emptyset$. Dar V_x este vecinătate deschisă arbitrară a lui x deci $x \in \bar{A}$.
3^o $\mathcal{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{\mathcal{C}A}$ şi este mulţime închisă fiind intersecţia a două mulţimi închise.

■ Într-un spaţiu metric (X, d) un *şir* este imaginea unei funcţii $s: \mathbb{N}^* \to X$. Se va nota pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $s(n) = x_n$.

Fie (X, d) un spaţiu metric. Spunem că şirul $(x_n) \subset X$ este *convergent* dacă:
$(\exists\, x)(\forall\, V)(\exists n_V)(\forall\, n)\ (x \in X, V \in \mathcal{V}_x,\ n_V \in \mathbb{N},\ n \geq n_V \to x_n \in V)$.

Observaţie. Conform proprietăţii de separaţie a lui **Hausdorff**, x definit anterior este unic determinat şi se va numi *limita şirului* (x_n). Se va scrie: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sau mai simplu $x_n \to x$.

Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1^o $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
2^o Pentru fiecare $V \in \mathcal{V}_x$ mulţimea $\{n \in \mathbb{N} :\ x_n \notin V\}$ este finită.
3^o Pentru orice $r > 0$ există $n(r) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in S(x,r)$ pentru orice $n \geq n(r)$.
4^o Pentru orice $r > 0$ există $n(r) \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x) < r$ pentru orice $n \geq n(r)$.
5^o $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

■ Dacă $(V, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat şi $(x_n) \subset V$ atunci:
$x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \iff [\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ a.î. \|x_n - x\| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n(\varepsilon)]$.

■ Un şir (x_n) într-un spaţiu metric se numeşte *şir* ***Cauchy*** (sau *şir fundamental*) dacă:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall\, m, n \geq n(\varepsilon)$ sau echivalent:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $d\left(x_{n+p}, x_n\right) < \varepsilon, \forall\, n \geq n(\varepsilon), \forall\, p \in \mathbb{N}$.

Într-un spaţiu metric, orice şir convergent este un şir **CAUCHY**.

Să presupunem că (x_n) este un şir convergent în spaţiul metric (X, d). Atunci $\exists\, x \in X$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ deci pentru oricare $\varepsilon > 0$ există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru oricare $n \geq n(\varepsilon)$.
Atunci, folosind inegalitatea triunghiului, avem:

$$d(x_n - x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,\ \forall\, m, n \geq n(\varepsilon),$$

prin urmare (x_n) este un şir fudamental.

Observaţie. Nu orice şir **CAUCHY** este convergent. De exemplu $X = [0,1)$ este un spaţiu metric cu distanţa definită ca $d(x, y) = |x - y|$; $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este un şir **CAUCHY** deoarece este convegent în $\mathbb{R}$ şi $x_x \to 1$ $(n \to \infty)$. Dar $1 \notin [0,1)$.
Un alt exemplu îl constituie şirul $(x_n) \subset \mathbb{Q}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, care nu converge la un număr raţional.
Astfel se impune definiţia de la exerciţiul următor.

■ Un spaţiu metric (X, d) se numeşte *complet* dacă orice şir **CAUCHY** este convergent la o limită care este de asemenea din X.

Să se arate că:
1^o Spaţiul metric $(\mathbb{R}, d)$, $d(x, y) = |x - y|$ este complet.
2^o Spaţiul metric $(\mathbb{C}, d)$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ este complet.

■ Spaţiul metric $(\mathbb{Q}, d)$, $d(x, y) = |x - y|$ nu este complet.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere raţionale pozitive:

$$x_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}\,,\qquad p_n \in \mathbb{Z}_+^*\,,\qquad n \in \mathbb{N}^*$$

astfel încât $x_n^2 \xrightarrow{d} 2$, $(n \to \infty)$. Se arată că $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir **CAUCHY** care nu converge în $\mathbb{Q}$.
Fie $(1, 4)$ o vecinătate a punctului 2. Deoarece $y_n = x_n^2 \xrightarrow{d} 2$, $(n \to \infty)$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_n = x_n^2 \in (1, 4)$ pentru orice $n \geq n_0$. Deoarece $(y_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent, atunci $(y_n)_{n\geq 1}$ este un şir **CAUCHY**. Deci pentru

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |y_{n+p} - y_n| = |x_{n+p}^2 - x_n^2| < 2\varepsilon\,,\ \forall\, n \geq N(\varepsilon),\ \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Atunci:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{|y_{n+p} - y_n|}{x_{n+p} + x_n} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

deoarece $x_{n+p} + x_n > 2$. Deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir **CAUCHY**. Presupunem că $x_n^2 \xrightarrow{d} x^0$, $(n \to \infty)$, unde $x^0 = \frac{p^0}{q^0} \in \mathbb{Q}$. Atunci obţinem:

$$2 = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \left(\frac{p^0}{q^0}\right)^2,$$

de unde rezultă contradicţia:

$$\frac{p^0}{q^0} = \sqrt{2}\,.$$

■ Un spaţiu normat $(V, \|\cdot\|)$ ce este complet în raport cu distanţa indusă se numeşte *spaţiu **BANACH***.

Spaţiul euclidian real este un spaţiu **BANACH**.

■ Fie (x_n) un şir în spaţiul metric (X, d) şi $a \in X$ un punct de acumulare al mulţimii termenilor şirului. Atunci (x_n) conţine un subşir (x_{k_n}) care converge la a.

Considerăm şirul de sfere:

$$S_n \coloneqq S\left(a, \frac{1}{n}\right) \setminus P\{a\},\qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Fie $x_{k_1} \in \{x_m \mid m \in \mathbb{N}^*\} \cap S_1$. Acum S_2 trebuie să conţină un punct $x_{k_2} \in \{x_m \mid m \geq k_1 + 1\}$, întrucât fiecare S_n conţine mai multe puncte ale lui (x_n). În mod similar se poate determina un punct $x_{k_3} \in \{x_m \mid m > k_2\} \cap S_3$ şi în general:

$$x_{k_{n+1}} \in \{x_m \mid m > k_n\} \cap S_{n+1}.$$

Astfel obţinem un subşir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ de termeni distincţi ai şirului original. Dar $x_{k_n} \in S_n$, prin urmare:

$$0 \leq d(x_{k_n}, a) < \frac{1}{k_n} \to 0, \qquad \text{când } n \to \infty.$$

Prin urmare: $\quad a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$.

■ Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, este un spaţiu **BANACH**.

Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. Atunci:

$$|x_k - y_k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{p} \max\{|x_k - y_k|, \qquad k = 1,2, \dots, p\} \qquad (1)$$

pentru $k = 1,2, \dots, p$. Rezultă că şirul (x_n), unde $x_n = (x_{1_n}, x_{2_n}, \dots, x_{p_n})$ este convergent pe $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$:

$$x_n \to x \ \Leftrightarrow [x_{k_n} \to x_k, \qquad \text{pentru } k = 1,2, \dots, p]$$

Din (1) rezultă că (x_n) este un şir **CAUCHY** în $\mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă şirurile $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $k = 1, 2, \dots, p$ sunt toate şiruri **CAUCHY**.

Fie acum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir **CAUCHY** în $\mathbb{R}^p$. Atunci pentru oricare $k \in \{1,2, \dots, p\}$, $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir **CAUCHY** în $\mathbb{R}$. Prin urmare, din criteriul lui **CAUCHY** rezultă că (x_{k_n}) este convergent în $\mathbb{R}$, există $x_k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_k$, $k = 1,2, \dots, p$.

Prin urmare:

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_{k_n}) = (x_1, x_2, \dots . x_p)$, deci (x_n) este un şir convergent.

■ Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f: X \to X$ o funcţie.

1^o Un punct $a \in X$ se numeşte *punct fix* pentru funcţia f daca şi numai dacă $f(a) = a$. Notăm $Fix(f)$ mulţimea tuturor punctelor fixe ale funcţiei f.

2^o Funcţia f se numeşte *contracţie* de constanta α dacă $\alpha \in (0,1)$ şi $d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$, pentru oricare $x, y \in X$.

Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, definită pe spaţiul euclidian real cu distanţa $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
Să se determine punctele fixe ale acesteia şi dacă funcţia este o contracţie.

$Fix(f) = \{0\}$ şi f nu este contracţie. Într-adevăr, dacă presupunem că există un număr $\alpha \in (0,1)$ astfel încât:
$|\sin x - \sin y| \leq \alpha |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, atunci, pentru $y = 0$ avem:
$|\sin x| \leq \alpha |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, de unde $1 = \lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \alpha$, în contradicţie cu ipoteza $\alpha \in (0,1)$.

■ (*Teorema punctului fix a lui **BANACH***). Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $f: X \to X$ o contracţie de constantă $\alpha \in (0,1)$. Atunci f are un punct fix unic. Mai mult, dacă $x_0 \in X$ atunci şirul definit prin iteraţie:

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad (\star)$$

converge la a şi: $\quad d(x_n, a) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $\qquad (\star\star)$

1^o Mai întâi demonstrăm că şirul construit prin $(\star)$ este fundamental. Pentru aceasta demonstrăm că:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n\, d(x_0, x_1), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad (1)$$

prin inducţie după n.
Pentru $n = 1$, întrucât f este o contracţie, avem:

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha \cdot d(x_0, x_1).$$

Acum presupunem că, pentru un $n \in \mathbb{N}^*$ fix, inegalitatea (1) este adevărată; atunci:

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_a), f(x_{n+1})) \leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^{n+1} d(x_0, x_1)$$

şi inegalitatea este demonstrată. Dacă $p \in \mathbb{N}^*$, din inegalitatea triunghiului şi (1) avem:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$$
$$\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{n+p-1} d(x_0, x_1) = \alpha^n \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) .$$

Prin urmare:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^* \qquad (2)$$

Dacă $\varepsilon > 0$, deoarece $\alpha^n \to 0$, există un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, (x_n) este un şir **CAUCHY**. Dar (X, d) este un spaţiu metric complet, prin urmare (x_n) este convergent. Fie a limita:

$$a \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n \qquad (3)$$

2^o Demonstrăm că $a \in Fix(f)$. Utilizând din nou faptul că f este o contracţie şi (3), avem:

$$0 \le d\big(f(x_n), f(a)\big) \le \alpha \cdot d(x_n, a) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha \cdot d(a, a) = 0\,,$$

prin urmare:

$$d\big(f(x_n), f(a)\big) \to 0 \ \Leftrightarrow f(x_n) \to f(a) \ \Leftrightarrow \ x_{n+1} \to f(a) \ (n \to \infty),$$

de unde $f(a) = a$, deoarece limita şirului (x_n) este unică.

3^o Demonstrăm că a este unicul punct fix al funcţiei f.

Presupunem că $b \in Fix\ (f)$, atunci $f(b) = b$ şi deci:

$d(a, b) = d\big(f(a), f(b)\big) \le \alpha \cdot d(a, b)$ sau:

$(1 - \alpha)d(a, b) \le 0 \ \Leftrightarrow d(a, b) \le 0 \ \Leftrightarrow d(a, b) = 0 \ \Leftrightarrow a = b$ deci $Fix\ f = \{a\}$.

4^o Pentru a demonstra inegalitatea ($\star\star$) folosim inegalitatea triunghiului şi (2). Avem:

$d(x_n, a) \le d\big(x_n, x_{n+p}\big) + d\big(x_{n+p}\,, a\big) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_0, x_1) + d\big(x_{n+p}\,, a\big),\ \ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*$ şi pentru $p \to \infty$ se obţine:

$d(x_n, a) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_0, x_1)$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

Observaţie. Teoremele de punct fix au aplicaţii în teoria ecuaţiilor diferenţiale, în teoria ecuaţiilor integrale, în teoria aproximării, în teoria stabilităţii ecuaţiilor diferenţiale etc.

■ Fie $(X, d), (Y, \delta)$ un spaţiu metric şi $f_n\colon X \to Y\ ,\ n \in \mathbb{N}$.

Spunem că şirul (f_n) este *uniform convergent* dacă există $f\colon X \to Y$ astfel încât:

$[\,\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}]$ a.î. $\delta\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon\,, \forall\, n \ge n_\varepsilon, \forall\, x \in X]$.

Scriem în acest caz: $f_n \xrightarrow{u} f$ (pe X).

Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir convergent uniform: $f_n\colon X \to X\ ,\ f_n \xrightarrow{u} f$ (pe X). Dacă:

1^o $Fix\ (f_n) \ne \emptyset\,, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

2^o f este o contracţie de constantă α;

atunci orice şir (x_n) de puncte fixe, $x_n \in Fix\ (f_n)$ converge şi are ca limită punctul fix unic de f.

Teorema lui **Banach** implică faptul că f are un punct fix unic. Fie $Fix\ (f) = \{x\}$. Trebuie să arătăm că $x_n \to x$. Avem:

$d(x_n, x) = d\big(f_n(x_n), f(x)\big) \le d\big(f_n(x_n), f(x_n)\big) + d\big(f(x_n), f(x)\big) \le d\big(f_n(x_n), f(x)\big) + \alpha d(x_n, x)$ de unde:

$d(x_n, x) \le \frac{1}{1-\alpha}\, d\big(f_n(x_n), f(x_n)\big) \to 0$ când $n \to \infty$, prin urmare $d(x_n, x) \to 0$ când $n \to \infty$. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

■ Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu **Banach** şi $f\colon X \to X$ o contracţie de constantă α. Atunci $id_x - f$ este o funcţie surjectivă.

Fie $y \in X$, fix şi definit:

$$h\colon X \to X\ ,\ h(x) = f(x) + y.$$

Atunci:

$\|h(x_1) - h(x_2)\| = \|f(x_1) - f(x_2)\| \le \alpha\|x_1 - x_2\|$, prin urmare h este o contracţie de constantă α şi, prin teorema lui Banach, există un $x \in X$ unic astfel încât:

$h(x) = x \ \Leftrightarrow f(x) + y = x \ \Leftrightarrow x - f(x) = y.$

Prin urmare $id_x - f$ este o funcţie surjectivă.

Un spaţiu cu un produs interior infinit dimensional $(V, \langle\,\cdot,\cdot\rangle)$, ce este un spaţiu **Banach** în raport cu regula indusă, se numeşte *spaţiu **Hilbert***.

Spaţii metrice. Exerciţii

■ Fie $(G, +)$ un grup comutativ şi $p: G \to \mathbb{R}_+$ o funcţie ce satisface proprietăţile:
1^o $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2^o $p(-x) = p(x),\ \forall\, x \in G$;
3^o $p(x+y) \le p(x) + p(y),\ \forall\, x, y \in G$.
Să se arate că aplicaţia $d: G \times G \to \mathbb{R},\ d(x,y) = p(x-y),\ \forall\, x, y \in G$ este o metrică pe G.

Verificăm că d satisface axiomele metricii:
1^o $d(x,y) = p(x-y) \le 0,\ \forall\, x, y \in G$ pentru că $x - y = x + (-y) \in G$ şi $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2^o $d(x,y) = p(x-y) = p(-x+y) = p(y-x) = d(y,x)$;
3^o $d(x,y) = p(x-y) = p(x-z+z-y) \le p(x-z) + p(z-y) = d(x,z) + d(z,y),\ \forall\, x, y, z \in G$.

■ Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $d: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to [0, \infty)$, definită prin:
$$d\left((x_1, x_2, \dots x_p),\ (y_1, y_2, \dots y_p)\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_p - y_p|\,.$$
Atunci $(\mathbb{R}^p, d)$ este un spaţiu metric.
Pentru $p = 2$ să se decrie bila de centru (0, 0) şi rază 1.

Dacă $p = 2$, atunci bila centrată în origine şi de rază 1 este:
$$S\big((0,0)1\big) = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \max\{|x|, |y|\} < 1 \,\},$$
care este interiorul unui pătrat.

■ Într-un spaţiu metric (X, d) au loc relaţiile:
1^o $d(x_1, x_n) \le d(x_2, x_3) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n),\ \forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in X$;
2^o $|d(x,z) - (y,z)| \le d(x,y),\ \forall\, x, y, z \in X$;
3^o $|d(x,y) - d(x', y')| \le d(x, x') + d(y, y'),\ \forall x, y, x', y' \in X$.

1^0 Se aplică succesiv inegalitatea triunghiului.
2^0 $\forall\, x, y, z \in X$, avem $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$, de unde $d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y)$.
Procedând analog sau schimbând între ele rolurile lui x şi y şi folosind proprietatea de simtrie a metricii obţinem şi $d(y,z) - d(x,z) \le d(y,z)$, de unde $|d(x,z) - d(x,y)| \le d(x,y),\ \forall\, x, y, z \in X$.
3^o

■ Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci:
$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ – *norma euclidiană*;
$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$
$\|x\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|,\ , |x_p|\}$,
pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, sunt trei norme pe $\mathbb{R}^p$.

■ Fie $(G, +)$ un grup comutativ şi $p: G \to \mathbb{R}_+$ o funcţie ce satisface proprietăţile:
- $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $p(-x) = p(x),\ \forall\, x \in G$;
- $p(x+y) \le p(x) + p(y),\ \forall\, x, y \in G$.

Să se arate că aplicaţia $d: G \times G \to \mathbb{R}\,,\ d(x,y) = p(x-y),\ \forall\, x, y \in G$ este o metrică pe G.

Verificăm că d satisface axiomele metricii: 1^o. $d(x,y) = p(x-y) \le 0\,, x, y \in G$ pentru că $x - y = x + (-y) \in G$ şi $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow p(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y\,;$ 2^o $d(x,y) = p(x-y) = p(-x+y) = p(y-x) = d(y,x)$ 3^o $d(x,y) = p(x-y) = p(x-z+z-y) \le p(x-z) + p(z-y) = d(x,z) + d(z,y), \forall\, x, y, z \in G$.

■ Să se arate că următoarele aplicaţii sunt distanţe pe $\mathbb{N}$:

1^o $\quad d: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+\,,\ d(m,n) = |m-n|,\ \forall\, m,n \in \mathbb{N}.$

2^o $\quad d: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+\,,\ d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|,\ \forall\, m,n \in \mathbb{N}.$

3^o $\quad d: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+\,,\ d(m,n) = \left|\frac{m}{1+m} - \frac{n}{1+n}\right|,\ \forall\, m,n \in \mathbb{N}\,.$

■ Să se arate că aplicaţiile: $d, \delta, \Delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definite prin:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\ ,\quad \delta(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,\quad \Delta(x,y) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k - y_k|$$

sunt metrici pe $\mathbb{R}^n$ şi acestea sunt echivalente.

Pentru d se aplică inegalitatea lui **Minkowski**:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\ ,\qquad \forall\, \boldsymbol{a} = (a_1\,, a_2, \dots, a_n),\qquad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Pentru a demonstra echivalenţa acestor metrici, se arată că:

$$\Delta \le \delta \le \sqrt{n} \cdot d \le n \cdot \delta \le n\sqrt{n} \cdot \delta\,.$$

■ Se consideră spaţiul vectorial $\mathbb{C}^n$ înzestrat cu operaţiile uzuale definite prin:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2\,, \dots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\,,\qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Atunci

$$\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+\,,\qquad \|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z_k}}$$

este o normă pe $\mathbb{C}^n$ şi $d: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+\,,\ d(z,z') = \|z - z'\|$ este o distanţă pe $\mathbb{C}^n$.

■ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică pozitiv definită.

1^o Să se demonstreze că funcţia $\langle \cdot,\cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definită prin:

$$\langle x, y \rangle_A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

2^o Să se demonstreze că funcţia $\|x\|_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ definită prin:

$$\|x\|_A = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \right)^{\frac{1}{2}}$$

este o normă pe $\mathbb{R}^n$.

■ Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt vectori ai unui spaţiu normat $(E, \|\cdot\|)$, atunci:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \le \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\,.$$

■ Fie $A = [0,1] \times (1,2) \cup \{(2,2)\}$ o submulţime a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^2$. Să se demonstreze că A nu este nici închisă, nici deschisă şi să se determine $\mathcal{I}z\ A$ şi $\bar{A}$.

A nu este deschisă deoarece punctul $(1,0) \notin A$, dar pentru orice $r > 0$ bila $S\big((1,0), r\big)$ nu este inclusă în A.

A nu este nici închisă, deoarece $G \coloneqq \mathbb{R}^2 \setminus A$ nu este deschisă: punctul $(1,1) \in G$ şi pentru orice $r > 0$ bila $S\big((1,1), r\big)$ nu este inclusă în G.
$\mathcal{Iz}\,(A) = \{(2,2)\}$, deoarece $S\big((2,2),1\big) \cap A = \{(2,2)\}$ deci $(2,2)$ este punct izolat pentru A şi orice alt punct din A este punct de acumulare pentru A.
$\bar{A} = [0,1] \times \{(2,2)\}$ şi $A' = [0,1] \times [1,2]$.

■ Fie $A = [0,1] \times (1,2) \cup \{(2,2)\}$. Să se determine: $\mathcal{Int}(A)$, $\mathcal{Ext}(A)$, $\mathcal{Fr}(A)$.

$\mathcal{Int}(A) = (0,1) \times (1,2)$, $\mathcal{Ext}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus [0,1] \times \{(2,2)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}$.
$\mathcal{Fr}(A) = \{(0,y)\colon\ y \in [1,2]\} \cap \{(1,y)\colon\ y \in [1,2]\} \cap \{(x,1)\colon\ x \in [1,2]\} \cap \{(x,2)\colon\ x \in [1,2]\} \cap \{(2,2)\}$.

■ Fie $f\colon [a,b] \to [a,b]$, $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ şi presupunem că $0 \neq \|f'\| \coloneqq \sup\{|f'(x)| \mid x \in [a,b]\} < 1$. Să se arate că f are un punct fix unic.

Fie $x, y \in [a,b]$ două puncte arbitrare. Din teorema lui **Lagrange** rezultă: $\exists\, \zeta$ între x şi y astfel încât $f(x) - f(y) = f(\zeta)(x-y)$, prin urmare:

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\| \cdot |x-y|, \qquad \forall\, x, y \in [a,b].$$

f este contracţie de constanta $\|f'\|$. Dar $X = [a,b]$ este un spaţiu metric complet în raport cu distanţa euclidiană. Prin urmare, teorema punctului fix a lui **Banach** arată faptul că f are un punct fix unic.

■ Calculaţi rădăcinile reale ale ecuaţiei $x^5 + 10x - 1 = 0$ cu exact trei cifre.

Fie $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = x^5 + 10x - 1$; (1)
Deoarece $y'(x) = 5x^4 + 10 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că y este o funcţie crescătoare, prin urmare ecuaţia (1) are o rădăcină reală unică $a \in [0,1] \coloneqq X$ (deoarece $y(0) = -1 < y(1) = 10$).
Scriem ecuaţia sub forma $f(x) = x$ punând:

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 10}, \qquad f\colon X \to X,$$

unde $X = [0,1]$ este un spaţiu metric complet (cu spaţiul euclidian $d(x,y) = |x-y|$). Vom demonstra că f este o contracţie utilizând exerciţiul anterior. Avem:

$$f'(x) = \frac{-4x^3}{(x^4+10)^2}, \qquad x \in X.$$

Prin urmare f este o funcţie descrescătoare şi imaginea acesteia:

$$f(X) = f([0,1]) = [f(1), f(0)] = \left[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}\right] \subset X.$$

f este definit corect; mai mult, $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$, prin urmare $f' \in \mathcal{C}^0[0,1]$ şi

$$\|f'\| \leq |f'(x)| \leq \frac{4 \cdot 1}{(0+10)^2} = \frac{1}{25}, \qquad \forall\, x \in X.$$

Din exerciţiul anterior rezultă că $f\colon X \to X$ este o contracţie de constantă $\alpha = \frac{1}{25}$ şi putem aplica teorema lui **Banach**.
Fie $x_0 = 0$. Determinăm $n \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_0, x_1) = \frac{1}{25^n\left(1-\frac{1}{25}\right)} \left|0 - \frac{1}{10}\right| = \frac{1}{25^{n-1} \cdot 24 \cdot 100} < \frac{1}{10^3}; \qquad (2)$$

atunci $x_n \approx a$, $|x_n - a| < \frac{1}{1000}$, eroarea fiind mai mică decât 10^{-3}. Observăm că pentru $n = 2$, inegalitatea (2) este verificată.
Prin urmare, am obţinut exact soluţia ecuaţiei (1) aproximată cu trei cifre:

$$a \approx x_2 = f(x_1) = f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{\frac{1}{10^4} + 10} = \frac{10{,}000}{100{,}001} \approx 0{,}099.$$

■ Să se determine funţia $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$ şi $\lambda \neq 0$ astfel încât: $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \coloneqq \alpha$, unde M este o constantă pozitivă pentru care $|x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$ are o soluţie unică.

Este clar că integrala există şi partea dreaptă a ecuaţiei este o funcţie continuă pe X dacă $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$.
Se pune problema dacă există sau nu o funcţie continuă $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ care satisface ecuaţia, făcând o identitate în x pentru $x \in [a,b]$. Aplicăm teorema după cum urmează:

- definim funcţia $F(f)(x) = g(x) + \lambda \int_a^b t \cdot f(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}t$;
- arătam că F este o contracţie pentru $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0[a,b]$.

$$\|F(f_1) - F(f_2)\| = \left\| \lambda \, [f_1(t) - f_2(t)] t \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}t \leq \lambda \right| M(b-a) \| f_1 - f_2 \| = \alpha \|f_1 - f_2\|,$$

unde $\alpha \in (0, 1)$. Teorema garantează existenţa unei $f \in C^0[a, b]$ unice, astfel încât $F(f) = f$.

Diverse

■ Să se demonstreze că:

$$\int_0^\infty \mathbb{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = -\mathcal{C} . \qquad (1)$$

Formula lui **Weierstrass** referitoare la *funcţia gamma*:

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{x-1} \mathbb{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

(integrala fiind convergentă) susţine că:

$$\frac{1}{\Gamma(\mathrm{x})} = x \mathbb{e}^{\mathcal{C}x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathbb{e}^{-\frac{x}{n}} , \qquad (2)$$

unde produsul infinit din membrul al doilea este convergent absolut şi uniform pe orice interval compact al axei reale şi care nu conţine niciun număr negativ.
Logaritmăm cei doi membri: produsul infinit de funcţii derivabile se transformă într-o serie de funcţii derivabile.

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \mathcal{C}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right) . \qquad (3)$$

Seria de derivate din membrul al doilea este:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x}{x(n+x)}$$

şi aceasta este absolut convergentă pe orice submulţime compactă K a dreptei reale.
Într-adevăr, pentru orice submulţime compactă K, există un $A > 0$ astfel încât $K \subset [-A, A]$, deci $|x| < A$ şi, luând $n > 2A$, rezultă $|n + x| > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ adică $\left|\frac{1}{n(n+x)}\right| < \frac{2}{n^2}$, deci seria este majorată (pornind de la $n > 2A$) prin seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$. (În relaţia (3), care conţine logaritmi, ne interesează convergenţa seriei doar pe mulţimea $K \cap (0, \infty)$.)
Deci este valabilă egalitatea următoare:

$$-\frac{\Gamma'(\mathrm{x})}{\Gamma(\mathrm{x})} = \frac{1}{x} + \mathcal{C} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right) . \qquad (4)$$

Astfel avem:

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x) \left(\frac{1}{x} + \mathcal{C} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right)\right) . \qquad (4')$$

Integrala care defineşte funcţia Γ este, pentru $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, uniform convergentă şi funcţia Γ satisface condiţiile pentru care derivata se obţine din funcţia din interiorul integralei prin intermediul parametrului x:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathbb{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t . \qquad (5)$$

Din (4') şi (5) rezultă:

$$\int_0^\infty t^{x-1} \mathbb{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t = -\Gamma(\mathrm{x}) \left(\frac{1}{x} + \mathcal{C} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)\right).$$

Pentru $x = 1$ şi ţinând cont că: $\Gamma(1) = 1$ şi că $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, rezultă:

$$\int_0^\infty \mathbb{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t = -\mathcal{C} .$$

Observaţie. Introducând $x = -\ln t$ în (1) şi ţinând cont de teorema schimbării de variabilă pe un interval non-compact, obţinem o altă expresie pentru constanta lui **Euler** cu ajutorul integralei pe un interval non-compact (dar mărginit):

$$\int_0^1 \ln\left(\ln \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = -\mathcal{C} .$$

■ Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\mathcal{C}\,. \qquad (1)$$

Avem:

$$\int\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\left(\frac{(1-\mathrm{e}^{-x})'}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x=\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rezolvăm ultima integrală prin metoda integrării prin părţi alegând:

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\quad \ldots\ldots\ldots \quad f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$$

$$g'(x)=\frac{1}{x}\quad \ldots\ldots\ldots \quad g(x)=\ln x$$

deci:

$$\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}\ln x+\int\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x\,. \qquad (2)$$

S-a obţinut formula:

$$\int\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\mathrm{e}^{-x}\ln x-\int\mathrm{e}^{-x}\ln x\;\mathrm{d}x\,. \qquad (3)$$

Se aplică aici formula **Leibniz-Newton**, unde $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b\ , \qquad (4)$$

unde se notează:

$$F(x)\Big|_a^b=\lim_{\substack{\alpha\searrow a\\ \beta\nearrow b}}(F(\beta)-F(\alpha))\,, \qquad (4')$$

ceea ce este echivalent cu:

$$F(x)\Big|_a^b=\lim_{x\nearrow b}F(x)-\lim_{x\searrow a}F(x). \qquad (4'')$$

Formula este valabilă cu următoarele ipoteze:

1^o f este integrabilă pe orice mulţime compactă $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$;

2^o f admite o primitivă F;

3^o cele două limite de la (4'') sunt finite sau diferenţa lor este finită.

(Condiţiile 1^o şi 2^o sunt satisfăcute în cazurile particulare în care f este continuă pe (a,b)).

Din (3) şi (4) se obţine:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\ln(1-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{\infty}-\ \mathrm{e}^{-x}\ln x\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\;\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\lim_{x\searrow0}\ln(1-\mathrm{e}^{x})-(\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x-\lim_{x\searrow0}\mathrm{e}^{-x}\ln x)-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to\infty}(\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\mathrm{e}^{-x}\ln x)}_{l_2}-\underbrace{\lim_{x\searrow0}\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\mathrm{e}^{-x}\ln x}_{l_1}-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\;\mathrm{d}x\ ,$$

adică:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=l_2-l_1-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\;\mathrm{d}x\ . \qquad (5)$$

Pentru a calcula l_2 şi l_1 utilizăm limitele fundamentale:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1\,,\quad \lim_{x\searrow0}x\ln x=0\,,\quad \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x=0. \qquad (6)$$

Se obţine:

$$l_2=\lim_{x\to\infty}(\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\mathrm{e}^{-x}\ln x)=0\,. \qquad (7)$$

De asemenea se remarcă faptul că:

$$\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\mathrm{e}^{-x}\ln x=\ln\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}+(1-\mathrm{e}^{-x})\ln x=\ln\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}+\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\ (x\ln x)=$$

$$= \ln\frac{e^{-x}-1}{-x} + \frac{e^{-x}-1}{-x}\,(x\ln x)\ ,$$

adică:

$$\ln(1-e^{-x}) - e^{-x}\ln x = \ln\frac{e^{-x}-1}{-x} + \frac{e^{-x}-1}{-x}\,(x\ln x)\,.$$

Aplicând (6), obţinem:

$$l_1 = \lim_{x\searrow 0}(\ln(1-e^{-x}) - e^{-x}\ln x) = 0\,. \qquad (8)$$

Din (5), (7), (8) rezultă:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx = -\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx\,.$$

Să se demonstreze că:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) dx = \mathcal{C} \qquad (1)$$

Se aplică formula:

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\mathcal{C}\,,$$

demonstrată anterior.

Într-adevăr, prin descompunerea în fracţii simple, se obţine:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{e^{-x}}{x}\,. \qquad (2)$$

Ţinând cont şi de formula:

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx = e^{-x}\ln x + \int e^{-x}\ln x\,dx\,,$$

primitiva corespunzătoare integralei (1) va fi:

$$\int \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) dx = \ln x - \ln(1+x) - \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx =$$
$$= \ln\frac{x}{1+x} - \left(e^{-x}\ln x + \int e^{-x}\ln x\,dx\right).$$

Se aplică formula **LEIBNIZ-NEWTON**:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) dx = \ln\frac{x}{1+x}\bigg|_0^\infty - e^{x}\ \ln x\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x}{1+x} - \lim_{x\searrow 0}\ln\frac{x}{1+x} - \left(\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x - \lim_{x\searrow 0} e^{-x}\ln x\right) - \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx =$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{1+x} - e^{-x}\ln x\right)}_{L_2} - \underbrace{\lim_{x\searrow 0}\left(\ln\frac{x}{1+x} - e^{-x}\ln x\right)}_{L_1} - \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx\,,$$

adică:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) dx = L_2 - L_1 - \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx\,.$$

Dar

$$L_2 = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{1+x} - e^{-x}\ln x\right) = 0$$

şi

$$L_1 = \lim_{x\searrow 0}\left(\ln\frac{x}{1+x} - e^{-x}\ln x\right) = \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}(x\ln x) - \ln(1+x)\right) =$$
$$= \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}(x\ln x) - \ln(1+x)\right) = 0.$$

Deci:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) dx = \mathcal{C}\,.$$

■ Se consideră numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ care satisfac proprietăţile:

1^o $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$;

2^o $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$; $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$. (adică numerele $p_1, p_2, \dots, p_n$ sunt *(**HÖLDER**) conjugate*)

Atunci:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq \frac{1}{p_1} \cdot a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2} \cdot a_2^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \cdot a_n^{p_n} ,$$

*(inegalitatea lui **YOUNG**)*

cu egalitate dacă şi numai dacă: $a_1^{p_1} = a_2^{p_2} = \cdots = a_n^{p_n}$.

Utilizăm inegalitatea ponderată a lui **JENSEN** pentru funcţii concave:

Dacă $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie concavă, I-interval, atunci:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) , \qquad w_k > 0 , \qquad \sum_{k=1}^{n} w_k x_k \in I , \qquad \sum_{k=1}^{n} w_k = 1 .$$

Utilizând concavitatea funcţiei logaritmice cu bază $b > 1$, în aranjarea:

$$\log_b a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \frac{1}{p_1} \log_b a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2} \log_b a_2^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \log_b a_n^{p_n} \leq \log_b \left(\frac{1}{p_1} \cdot a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2} \cdot a_2^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \cdot a_n^{p_n}\right).$$

cu monotonia funcţiei $\log_b$, se obţine inegalitatea din enunţ.

Observaţii.

1^o În cazul particular $n = 2$ se obţine forma clasică a *inegalităţii lui **YOUNG***:

- Dacă numerele p, q sunt (**HÖLDER**) conjugate, adică $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci, pentru $a, b \geq 0$, avem:

  $$a \cdot b \leq \frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q ,$$

cu egalitate dacă $a^p = b^q$.

2^o Dacă în forma generală a inegalităţii lui **YOUNG** se iau $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = n$ (care sunt **HÖLDER**-conjugate), se obţine:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq \frac{1}{n} \cdot (a_1^n + a_2^n + \cdots . + a_n^n), \qquad \forall\, a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 , n \in \mathbb{N} , n \geq 2 ,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

3^o Dacă în inegalitatea anterioară luăm $x_i = \sqrt[n]{a_i}$, $i = \overline{1, n}$, se deduce *inegalitatea mediilor*:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \qquad \forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 .$$

4^o Dacă în inegalitatea lui **YOUNG** generalizată se iau: $a_i = x_i^{q_i}$, $\frac{1}{p_i} = q_i$, $i = \overline{1, n}$, se obţine *inegalitatea poderată a mediilor*:

$$x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \dots \cdot x_n^{q_n} \leq q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n ,$$

$\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$ $\qquad q_1, q_2, \dots, q_n \in (0, 1), q_1, q_2, \dots, q_n = 1$

■ Fie $a_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ şi $p_1, p_2, \dots, p_m > 1$ numere **HÖLDER**-conjugate. Dacă

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{p_1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{p_2} = \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_{im}^{p_m} = 1 ,$$

atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq 1 .$$

Pentru $i = \overline{1, n}$, cu inegalitatea lui **YOUNG** generalizată, avem:

$$\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \frac{1}{p_1} \cdot a_{i1}^{p_1} + \frac{1}{p_2} \cdot a_{i2}^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} \cdot a_{im}^{p_m} .$$

Însumând după $i = \overline{1, n}$, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{p_1} + \frac{1}{p_2} \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} \sum_{i=1}^{n} a_{im}^{p_m} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1 .$$

(*Inegalitatea lui **HÖLDER** generalizată*). Dacă $a_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}$ şi $p_1, p_2, \dots, p_m > 1$ sunt numere **HÖLDER**-conjugate, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}.$$

Să considerăm numerele:

$$\alpha_{ij} := \frac{a_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}}\,, \qquad i = \overline{1,n}\,, \qquad j = \overline{1,m}\ .$$

Pentru acestea avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{p_j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}}\right)^{p_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}^{p_j}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}} = 1\,,$$

deci numerele α_{ij} sunt în situaţia numerelor a_{ij} din exerciţiul precedent. Prin urmare:

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\alpha_{ij} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\frac{a_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}\right)^{1/p_j}} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}\right)^{1/p_j}.$$

(*Inegalitatea lui **ROGERS***). Dacă $0 < r < 1$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{1-r} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-r}.$$

Printr-o simplă schimbare de variabilă, inegalitatea lui **ROGERS** este echivalentă cu inegalitatea lui **HÖLDER**.

(*Inegalitatea lui **ROGERS** generalizată*). Dacă $a_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}$ şi $0 < r_1, r_2, \dots, r_m < 1$ astfel încât $r_1 + r_2 + \dots + r_m = 1$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{r_j} \leq \prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{r_j}.$$

Echivalenţa intre inegalitatea lui **HÖLDER** generalizată şi inegalitatea lui **ROGERS** generalizată are loc pe baza substituţiilor $\frac{1}{p_j} = r_j$, respectiv, $a_{ij} \to a_{ij}^{1/p_j} = a_{ij}^{r_j},\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}$.

(*Inegalitatea **CAUCHY-BUNIAKOVSKI-SCHWARZ** generalizată*). Dacă $a_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}\right)^m \leq \prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^m\right).$$

Luând $p_1 = p_2 = \dots = p_m = m$ (care evident sunt numere **HÖLDER**-conjugate) în inegalitatea lui **HÖLDER** generalizată, se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Observaţie. Pentru $m = 3$, se obţine inegalitatea ***CAUCHY-BUNIAKOVSKI-SCHWARZ*** pentru trei variabile:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i\right)^3 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^3\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^3\right).$$

(*Inegalitatea lui **MINKOWSKI** generalizată*). Dacă $a_{ij} \geq 0\,,\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*$ şi $p > 1$, atunci:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

Pentru $p < 1\,, p \neq 0$, inegalitatea se inversează.

Demonstraţia se face prin inducţie după n. Pentru $m = 1$, relaţia are loc cu egalitate. Cazul $m = 2$ constituie pasul esenţial al demonstraţiei, deoarece reprezintă inegalitatea clasică a lui **Minkowski** (cu notaţie modificată). Mai exact, avem de demonstrat inegalitatea:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

Utilizând o idee de demonstraţie a lui **Riesz**, se va porni de la identitatea:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{p} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{p-1}$$

şi vom aplica inegalitatea **Rogers-Hölder** pentru fiecare sumă din membrul drept.

Ţinând cont şi de faptul că $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ este echivalent cu $(p-1)q = p$, avem:

$$S \coloneqq \sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{p} \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j} + a_{2j}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} = \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot S^{\frac{1}{q}}.$$

Prin împărţire cu $S^{\frac{1}{q}}$, se obţine inegalitatea (2).

Presupunem adevărată inegalitatea (1) în cazul m şi vom demonstra că este adevărată şi în cazul $m + 1$. Într-adevăr, folosind cazul $m = 2$, demonstrat mai sus şi ipoteza de inducţie, avem succesiv:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m+1} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} + a_{m+1j}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} + a_{m+1j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{m+1j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{m+1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observaţie. pentru $m = 2$, se obţine inegalitatea clasică a lui **Minkowski**:

- Dacă $a_i, b_i \ge 0\,,\; i = 1, 2, \dots, n$ şi $p > 1$, atunci:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + b_i\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

cu egalitate dacă şirurile $(a_i)_{i=\overline{1,n}}\,, (b_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt proporţionale.

CUPRINS

Anexe

CUPRINS	
Calcul real	Preliminarii | Calcul diferenţial | Calcul integral
Analiză complexă	
Calcul multivariabil	Spaţiul $\mathbb{R}^n$ | Limită a unei funcţii | Continuitate | Derivabilitate | Integrală | Spaţii topologice
Analiză matematică abstractă	Spaţii topologice
Anexe	

Formule importante

Binomul lui ***Newton***: $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$, unde:

$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k}$ sunt *coeficienţii binomiali*.

Formulele lui ***Viète***: Fie ecuaţia $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,\ (a_0 \neq 0)$ şi $x_1, x_2, \dots, x_n$ rădăcinile sale. Atunci:

$\sum_i x_i = -\frac{a_1}{a_0}$, $\sum_{i<j} x_i x_j = -\frac{a_2}{a_0}$, … $x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$.

Suma puterilor primelor n *numere naturale*.

Fie $S_n^{(p)} = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p\ \ (n \geq 1, p \geq 0)$. Atunci:

$S_n^{(0)} = n$; $S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}$; $S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $S_n^{(3)} = [S_n^{(1)}]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$; $S_n^{(4)} = \frac{4n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$.

Ca relaţie de recurenţă, există formula lui **Pascal**:

$$(n+1)^p = 1 + C_p^1 S_n^{(p-1)} + C_p^2 S_n^{(p-2)} + \cdots + C_p^{p-1} S_n^{(1)} + C_p^p S_n^{(0)}.$$

Determinanţi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots\dots.. a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\Gamma} (sign\ \ \sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

une Γ_n este mulţimea tuturor permutărilor σ ale mulţimii $\{1, 2, \dots n\}$, iar $sign\ \sigma$ este semnul permutării σ; $sign\ \sigma = +1$ (respectiv -1) dacă σ are un număr par (respectiv impar) de inversiuni.

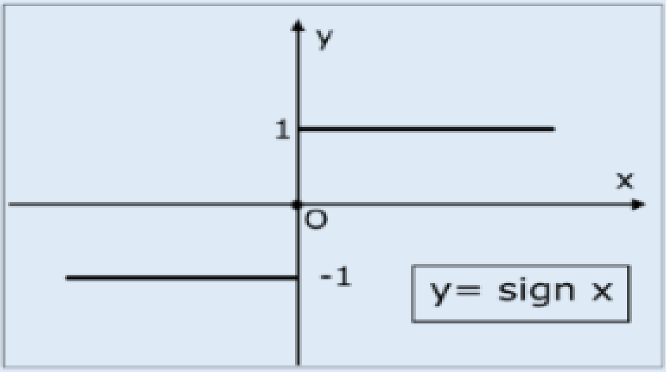
---

https://www.math.upenn.edu/~brweber/Courses/2012/Math116/CourseFiles/BasicK.pdf

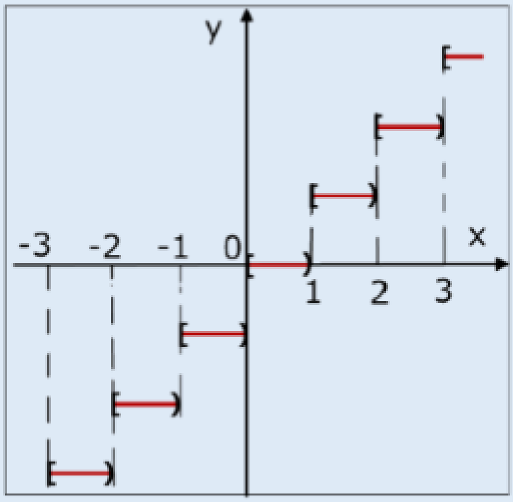
https://www.math.upenn.edu/~brweber/Courses/2012/Math116/CourseFiles/CheatSheet.pdf

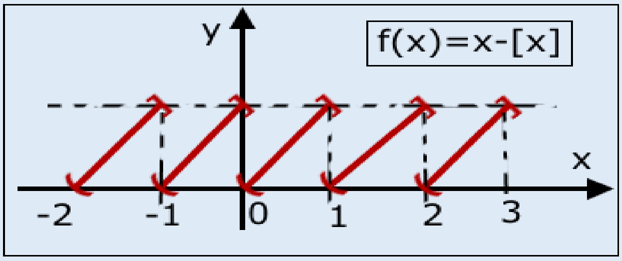
Funcţii elementare

Funcţia *signum*: $sign : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, $sign\, x = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$



Funcţia *parte întreagă*.




f(x)=x-[x]
y
x
-2
-1
0
1
2
3

Curbe remarcabile

(Detalii suplimentare la MathCurve.com)

Dreapta.

Ecuaţia dreptei care trece prin (x_0, y_0) şi are panta m:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Ecuaţia segmentară a dreptei:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Alte forme ale ecuaţiei dreptei:

$$y = mx + n, \quad Ax + By + C = 0.$$

Cercul.

Ecuaţia cercului cu centrul în (x_0, y_0) şi de rază *r*, în coordonate carteziene:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

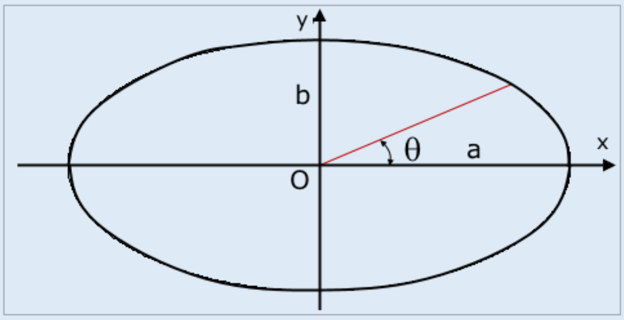
Elipsa.

Ecuaţia elipsei de semiaxe a, b în coordonate carteziene:

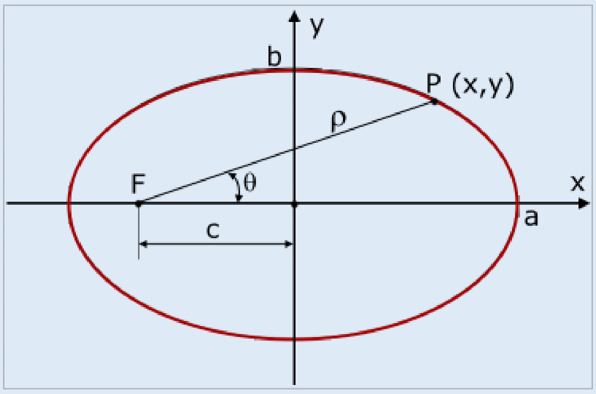
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuaţiile parametrice:

$$x = a\cos\theta\,, \qquad y = b\sin\theta\,, \qquad \theta \in [0, 2\,\pi]$$



Ecuaţia elipsei în coordonate polare: $\rho(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$.



$e = \frac{c}{a} < 1$ (excentricitatea)

$c^2 = a^2 - b^2, \quad p = \frac{b^2}{a}.$

Hiperbola.

Ecuaţia hiperbolei în coordonate carteziene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuaţiile parametrice (ramura pozitivă):

$$x = a\, ch\, t, \qquad y = b\, sh\, t, \qquad t \in \mathbb{R}_+^*$$

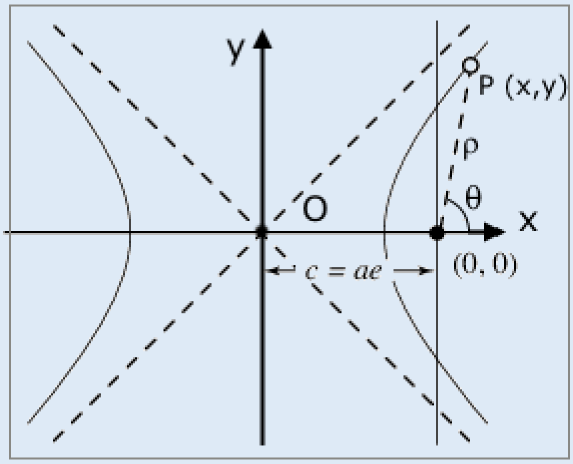
Ecuaţia în coordonate polare:

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}.$$

$e = \frac{c}{a} > 1$ (excentricitatea)

$c^2 = a^2 + b^2; \; p = \frac{b^2}{a}.$

Ecuaţia hiperbolei echilatere: $x^2 - y^2 = 1$



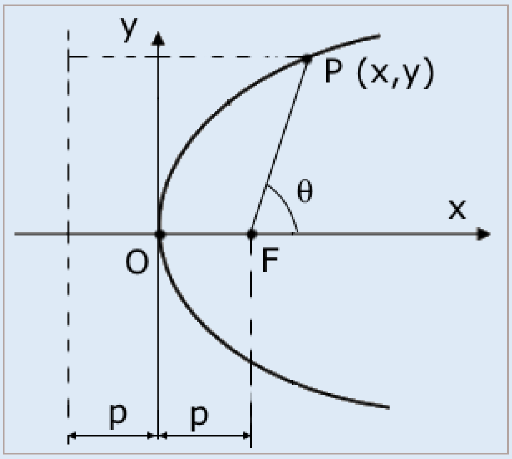
Parabola.

Ecuaţia parabolei în coordonate carteziene:

$$y^2 = 2px.$$

Ecuaţia parabolei în coordonate polare:

$$\rho(\theta) = \frac{P}{1 - \cos\theta}.$$

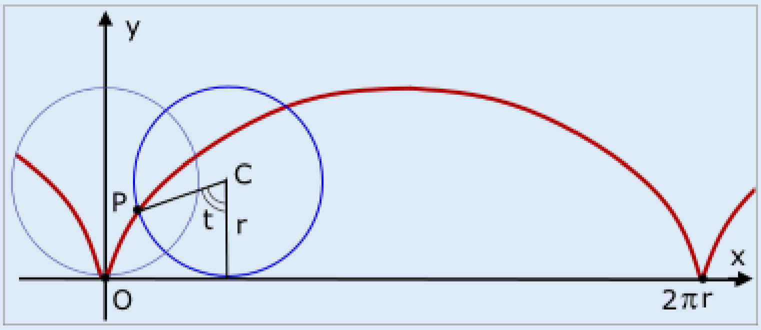


Cicloida.

Cicloida este locul geometric al punctului P, când cercul C se roteşte fără alunecare.

Ecuaţiile parametrice ale cicloidei:

$$x = r(t - \sin t), \qquad y = r(1 - \cos t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$



Lemniscata.

Lemniscata este locul geometric al punctelor P a.î.

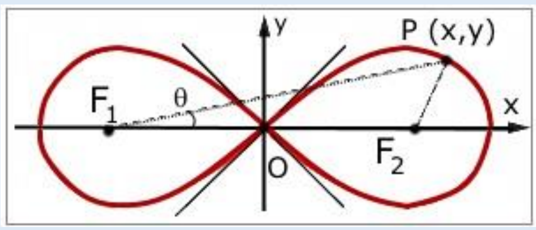
$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = \left(\frac{\overline{F_1F_2}}{2}\right)^2 = a^2\,.$$

Ecuaţia lemniscatei în coordonate carteziene:

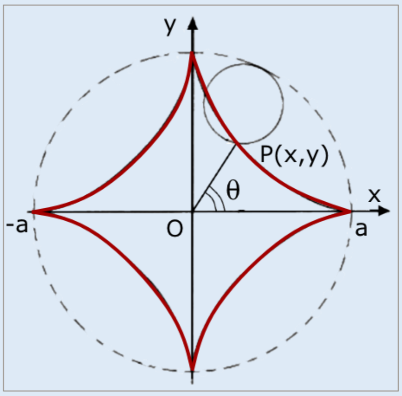
$$(y^2 + x^2)^2 = 2a^2(y^2 - x^2).$$

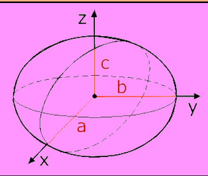
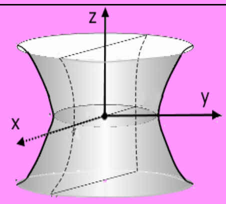
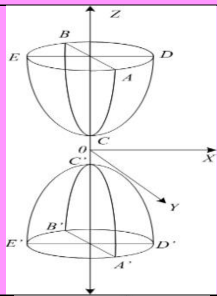
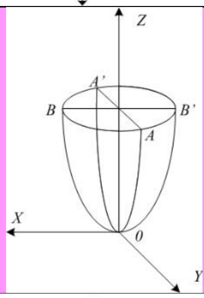
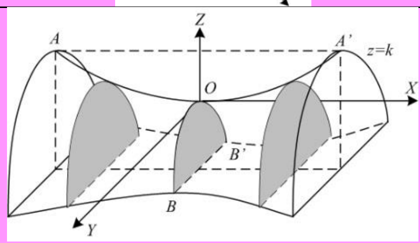
Ecuaţia în cooronate polare:

$$\rho^2(\theta) = 2a^2 \cos 2\theta, \quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$



Astroida.


y
P(x,y)
θ
x
-a
O
a

CUADRICE					
	Denumire	**Ecuaţie**	**Conică degenerată**	**Semi-invarianţi**	**Imagine**
1	Elipsoid real	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$	Da Nu	$\Delta \cdot \lambda_i < 0$ $i=\overline{1,3}$	
2	Elipsoid imaginar	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$	-- Nu	$\Delta \cdot \lambda_i < 0$ $i=\overline{1,3}$	
3	Hiperboloid cu o pânză	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$	Da Nu	$\Delta \cdot \lambda_i :$ $+,-,-$	
4	Hiperboloid cu două pânze	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$	Da Nu	$\Delta \cdot \lambda_i :$ $+,+,-$	
5	Paraboloid eliptic	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$	Nu Nu	$\delta=0, \Delta \neq 0$ $\lambda_1\lambda_2>0$	
6	Paraboloid hiperbolic	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$	Nu Nu	$\delta=0$, $\lambda_1\lambda_2<0$	
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					

17					

Notaţii utilizate

- $\vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow$ operatori logici (conjuncţia, disjuncţia, implicaţia, echivalenţa)
- $p \Rightarrow q$ propoziţia $p \rightarrow q$ este adevărată;
- $p \Leftrightarrow q$ propoziţia $p \leftrightarrow q$ este adevărată;
- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \vee B$ reuniunea, intersecţie, diferenţa, reuniunea disjunctă a mulţimilor A, B;
- $(\forall)$ cuantificatorul universal (*oricare ar fi*);
- $(\exists)$ cuantificatorul universal (*există*);
- $(\exists!)$ ''există şi este unic'';
- $\in \notin$ semnul apartenenţei şi neapartenenţei la o mulţime;
- $\mathcal{P}$ (A) mulţimea părţilor mulţimii A;
- $\overline{A}$ complementara mulţimii A;
- A~ B mulţimile *A*, *B* sunt echipotente;
- $\overline{\overline{A}}$, $card\ A$ cardinalul mulţimii A;
- $A \approx B$ mulţimile A, B sunt asemenea;
- $\mathcal{Z}$ mulţimea numerelor ordinale;
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mulţimea numerelor, respectiv, naturale, întregi, raţionale, reale, complexe;
- $\mathbb{K}$ mulţimea $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$;
- $\overline{\mathbb{R}}$ dreapta încheiată (completată);
- n^* succesorul numărului natural n;
- $A/\approx$ mulţimea cât (factor) a mulţimii A prin relaţia de echivalenţă $\approx$;
- $[\,.\,]_*$, $\{\,.\,\}_*$ funcţiile ''parte întreagă'' şi ''parte fracţionară'';
- $n!$ *n* factorial;
- $sgn\ x$ funcţia semn (*signum*);
- 1_A funcţia *identică* a mulţimii *A*;
- δ_{ij} simbolul lui **Kronecker**;
- (a, b), $[a, b]$ intervalul deschis, respectiv închis, determinat de punctele $a, b \in \mathbb{R}$;
- $\mathcal{V}(x_0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor unui punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$;
- A' sau $A'(\mathbb{R})$; $A'(\overline{\mathbb{R}})$ derivata mulţimii *A* în $\mathbb{R}$ sau $\overline{\mathbb{R}}$;
- $\mathbb{e}$ numărul lui **Euler** (baza logaritmilor naturali);

CUPRINS	
Calcul real	Preliminarii | Calcul diferențial | Calcul integral
Analiză complexă	
Calcul multivariabil	Spațiul $\mathbb{R}^n$ |Limită a unei funcții |Continuitate | Derivabilitate |Integrală | Spații topologice
Analiză matematică abstractă	Spații topologice
Anexe	

Simboluri

!! ‼ … ... :: ∷ := ≔
\above ┴ \acute ́ \aleph ℵ \alpha α \Alpha A \amalg ∐ \angle ∠ \aoint ∳
\approx≈ \asmash ⬆ \ast ∗ \asymp ≍ \atop ¦

\bar ̅ \Bar ̿ \because ∵ \begin 〖 \below ┬ \bet ℶ \beta β \Beta B \beth
ℶ \bigcap ⋂ \bigcup ⋃ \bigodot ⨀ \bigoplus ⨁ \bigotimes ⨂
\bigsqcup ⨆ \bigvee ⋁ \bigwedge ⋀ \binomial $(a+b)$^n =
∑_(k = 0)^n ▒(n¦k)a^k b^($n-k$) \bot ⊥ \bowtie ⋈ \box □ \boxdot ⊡
\boxminus ⊟ \boxplus ⊞ \bra ⟨ \break ↲ \breve ̆
\bullet ∙

\cap ∩ \cases Ⓒ \cbrt ∛ \cdot ⋅ \cdots ⋯ \check ̌ \chi χ \Chi X
\circ ∘ \close ┤ \clubsuit ♣ \coint ∲ \cong ≅ \coprod ∐ \cup ∪

\dalet ℸ \daleth ℸ \dashv ⊣ \dd ⅆ \Dd ⅅ \ddddot ⃜ \dddot ⃛ \ddot ̈
\ddots ⋱ \defeq ≝ \degc ℃ \degf ℉ \degree ° \delta δ \Delta Δ
\Deltaeq ≜ \diamond ⋄ \diamondsuit ♢ \div ÷ \dot ̇ \doteq ≐ \dots …
\doubleA 𝔸 \doubleB 𝔹 ……… \doubleZ ℤ \downarrow ↓ \Downarrow ⇓ \dsmash ⬇

\ee ⅇ \ell ℓ \emptyset ∅ \emsp \end 〗 \ensp \epsilon ϵ
\Epsilon E \eqarray █ \equiv ≡ \eta η \Eta H \exists ∃ \forall ∀ \fraktur 𝔞 \frakturA 𝔄
\frakturb 𝔟 \frakturB 𝔅 \frakturc 𝔠 \frakturC ℭ … \frakturz 𝔷 \frakturZ ℨ
\frown ⌑ \funcapply ⁡

\G Γ \Gamma Γ \ge ≥ \geq ≥ \gets ← \gg ≫ \gimel ℷ \grave ̀
\hairsp \hat ̂ \hbar ℏ \heartsuit ♡ \hookleftarrow ↩ \hookrightarrow ↪ \hphantom ⬄
\hsmash ⬌ \hvec ⃑

\identitymatrix (■(1&0&0@0&1&0@0&0&1)) \ii ⅈ \iiiint ⨌ \iiint ∭ \iint ∬
\int ∫ \Im ℑ \imath ı \in ∈ \inc ∆ \infty ∞ \int ∫ \integral 1/2π ∫_0^2π
▒ⅆθ/(a+b sin θ)=1/√(a^2-b^2) \iota ι \Iota I \itimes ⁢ \j Jay \jj ⅉ \jmath ȷ

\kappa κ \Kappa K \ket ⟩

\lambda λ \Lambda Λ \langle ⟨ \lbbrack ⟦ \lbrace \{ \lbrack [\lceil ⌈ \ldiv ∕
\ldivide ∕ \ldots … \le ≤ \left ├ \leftarrow ← \Leftarrow ⇐ \leftharpoondown ↽
\leftharpoonup ↼ \leftrightarrow ↔ \Leftrightarrow ⇔ \leq ≤ \lfloor ⌊ \lhvec ⃐ \limit
lim_(n→∞)⁡ 〖(1+1/n)^n〗 =e \ll ≪ \lmoust ⎰ \Longleftarrow ⟸ \Longleftrightarrow ⟺

\Longrightarrow ⟹ ??? \lrhrar \lvec ⃖

\mapsto ↦ \matrix ■ \medsp ??? \mid | \middle ⓜ \models ⊨ \mp ∓ \mu µ \Mu M

\nabla ∇ \nbsp \ne ≠ \nearrow ↗ \neg ¬ \neq ≠ \ni ∋ \norm ‖ \notcontain ∌
\notelement ∉ \notin ∉ \nu ν \Nu N \nwarrow ↖

\o ο \O O \odot ⊙ \of ▒ \oiiint ∰ \oiint ∯ \oint ∮ \omega ω \Omega Ω
\ominus ⊖ \open ⊦ \oplus ⊕ \otimes ⊗ \overbar ¯ \overbrace ⏞ \overbracket ⎴
\overline ¯ \overparen ⏜ \overshell ⏠

\parallel ∥ \partial ∂ \perp ⊥ \phantom ⟡ \phi φ \Phi Φ \pm ± \pmatrix ⒨ \pppprime ⁗ \ppprime ‴
\pprime ″ \prec ≺ \preceq ≼ \prime ′ \prod ∏ \propto ∝ \psi ψ \Psi Ψ

\qdrt ∜ \quadratic x=(-b±√(b^2-4ac))/2a

\rangle ⟩ \Rangle ⟫ \ratio ∶ \rbrace } \rbrack] \rceil ⌉ \rdots ??? \Re ℜ \rect ▭
\rfloor ⌋ \rho ρ \Rho P \rhvec ⃑ \right ┤ \rightarrow → \Rightarrow ⇒
\rightharpoondown ⇁ \rightharpoonup ⇀ \rmoust ⎱ \root ⒭

\scripta 𝒶 \scriptA 𝒜 \scriptb 𝒷 \scriptB ℬ \scriptc 𝒸 \scriptC 𝒞 ..... \sciptz 𝓏 \scriptZ
𝒵 \sdiv ⁄ \sdivide ∕ \searrow ↘ \setminus ∖ \sigma σ \Sigma Σ \sim ∼ \simeq
≃ \smash ⬍ \smile ⌣ \spadesuit ♠ \sqcap ⊓ \sqcup ⊔ \sqrt √ \sqsubseteq ⊑
\star ⋆ \subset ⊂ \subseteq ⊆ \succ ≻ \succeq ≽ \sum ∑ \superset ⊃ \superseteq ⊇
\swarrow ↙

\tau τ \Tau T \therefore ∴ \theta θ \Theta Θ \thicksp \tilde ˜ \times ×
\to → \top ⊤ \tvec ⃡

\ubar _ \Ubar ‗ \underbar ▁ \underbrace ⏟ \underbracket ⎵ \underline ▱ \underparen ⏝
\uparrow ↑ \Uparrow ⇑ \uplus ⊎ \upsilon υ \Upsilon Y

\varepsilon ε \varphi ϕ \varrho ϱ \varsigma ς \vartheta ϑ \vbar │ \vdash ⊢ \vdots ⋮
\vec ⃗ \vee ∨ \vert | \Vert \Vmatrix ⒩ \vphantom ⇳ \vthicksp

\wedge ∧ \wp ℘ \wr ≀

\xi ξ \Xi Ξ

\zeta ζ \Zeta Z \zwnj

~= +- -+ << <= -> >= >>

Simboluri pe categorii

- Alfabetul grec: \alpha α \Alpha A \beta β \Beta B \G Γ \Gamma Γ \delta δ \Delta Δ \eta η \Eta H \epsilon ϵ \iota ι \Iota I \kappa κ \Kappa K

\lambda λ \Lambda Λ \mu µ \Mu M \nu ν \Nu N \rho ρ \Rho P \sigma σ \Sigma
Σ \theta θ \tau τ \Tau T \Theta Θ \upsilon υ \Upsilon Y \psi ψ \Psi Ψ \phi φ \Phi Φ
\Epsilon E \chi χ \Chi X \xi ξ \Xi Ξ

\zeta ζ \Zeta Z \omega ω \Omega Ω \varepsilon ε \varphi ϕ \varrho ϱ
\varsigma ς \vartheta ϑ

- Alfabetul gotic: \fraktur 𝔞 \frakturA 𝔄 \frakturb 𝔟 \frakturB 𝔅 \frakturc 𝔠 \frakturC ℭ … \frakturz 𝔷 \frakturZ ℨ

- Operatori: \times × \sum ∑ \prod ∏ \ratio ∶ \bigodot ⨀ \bigoplus ⨁ \bigotimes ⨂ \bigsqcup ⨆ \bigvee ⋁ \bigwedge ⋀ \boxdot ⊡ \boxminus ⊟ \boxplus ⊞ \cdot ⋅ \sqrt √ \cbrt ∛ \qdrt ∜ \ast ∗ \exists ∃ \forall ∀ \circ ∘ \itimes ⁢ \pm ± \mp ∓ \ominus ⊖ \open ⊦ \oplus ⊕ \otimes ⊗ \odot ⊙ \rect ▭ \box □ \nabla ∇ \uplus ⊎ \ldiv ∕ \ldivide ∕ \div ÷ \sdiv / \sdivide / \amalg ∐ \coprod ∐
- Integrale: \coint ∲ \aoint ∳ \iiiint ⨌ \iiint ∭ \iint ∬ \int ∫ \oiiint ∰ \oiint ∯ \oint ∮ \lmoust ⎰ \rmoust ⎱
- Semne de echivalenţă: \sim ∼ \simeq ≃ \tilde ˜ \equiv ≡ \cong ≅ \doteq ≐ \Deltaeq ≜ \defeq ≝ \ge ≥ \geq ≥ \le ≤ \leq ≤ \ll ≪ \gg ≫ \prec ≺ \preceq ≼ \succ ≻ \succeq ≽ \neq ≠ \ne ≠ \approx≈ \asymp ≍
- Teoria mulţimilor: \in ∈ \notin ∉ \notelement ∉ \ni ∋ \emptyset ∅ \subset ⊂ \subseteq ⊆ \superset ⊃ \superseteq ⊇ \sqsubseteq ⊑ \cup ∪ \cap ∩ \bigcap ⋂ \bigcup ⋃ \notcontain ∌ \sqcap ⊓ \sqcup ⊔ \setminus ∖ \vee ∨ \wedge ∧
- Paranteze: \angle ∠ \bra ⟨ \langle ⟨ \lbbrack ⟦ \lbrace \{ \lbrack [\lceil ⌈ \ket ⟩ \rangle ⟩ \Rangle ⟫ \rbrace } \rbrack] \rfloor ⌋ \rceil ⌉ \lfloor ⌊ \left ├ \right ┤
- Săgeţi: \downarrow ↓ \Downarrow ⇓ \dsmash ⬇ \asmash ⬆ \gets ← \hookleftarrow ↩ \hookrightarrow ↪ \hphantom ⬄ \hsmash ⬌ \Longleftarrow ⟸ \Longleftrightarrow ⟺ \Longrightarrow ⟹ \leftarrow ← \Leftarrow ⇐ \leftharpoondown ↽ \leftharpoonup ↼ \leftrightarrow ↔ \Leftrightarrow ⇔ \rightarrow → \Rightarrow ⇒ \rightharpoondown ⇁ \rightharpoonup ⇀ \mapsto ↦ \nearrow ↗ \smash ⬍ \nwarrow ↖ \searrow ↘ \swarrow ↙ \uparrow ↑ \Uparrow ⇑ \break ⤶ \vphantom ⇳ \to → \tvec ⃡
- Litere speciale: \doubleA 𝔸 \doubleB 𝔹 ……… \doubleZ ℤ \scripta 𝒶 \scriptA 𝒜 \scriptb 𝒷 \scriptB ℬ \scriptc 𝒸 \scriptC 𝒞 ….. \sciptz 𝓏 \scriptZ 𝒵 \aleph ℵ \bet ב \gimel ג \dalet ד \dd ⅆ \Dd ⅅ \ee ⅇ \ell ℓ \degc ℃ \degf ℉ \j Jay \ii ⅈ \jj ⅉ \jmath ȷ \wp ℘ \wr ≀ \hbar ℏ \Im ℑ \imath ı \o ο \O Ο \Re ℜ \root ⒭ \propto ∝ \Vmatrix ⒩ \pmatrix ⒨
- Pictograme: \cases Ⓒ \diamond ⋄ \diamondsuit ♢ \clubsuit ♣ \bowtie ⋈ \middle ⓜ \matrix ■ \eqarray █ \phantom ⟡ \spadesuit ♠ \heartsuit ♡ \of ▒ \because ∵ \begin 〖 \end 〗 \therefore ∴ \frown ⌑ \funcapply ⁡ \smile ⌣ \star ⋆ \underline ▁
- Accente: \dot ̇ \acute ́ \ddddot ⃜ \dddot ⃛ \ddot ̈ \grave ̀ \breve ̆ \hat ̂ \check ̌ \bar ̅ \Bar ̿ \pppprime ⁗ \ppprime ‴ \pprime ″ \prime ′ \overbar ¯ \overbrace ⏞ \overbracket ⎴ \overline ¯ \overparen ⏜ \overshell ⏠ \ubar ̲ \Ubar ̳ \underbar ▁ \underbrace ⏟ \underbracket ⎵ \underparen ⏝ \vec ⃗ \lvec ⃖ \hvec ⃑ \lhvec ⃐ \rhvec ⃑ \neg ¬
- Alte semne: \above ┴ \below ┬ \mid ∣ \vert | \top ⊤ \vdash ⊢ \dashv ⊣ \bot ⊥ \close ┤ \models ⊨ \parallel ∥ \partial ∂ \perp ⊥ \atop ¦ \norm ‖ \inc ∆ \vbar │ \infty ∞ !! ‼ … … :: ∷ := ≔ ~= ≅ +- ± -+ ∓ << ≪ <= ≤ -> → >= ≥ >> ≫ \bullet ∙ \degree ° \dots … \cdots ⋯ \ddots ⋱ \vdots ⋮ \ldots … \rdots ⋰
- Spaţii: \emsp \medsp \nbsp \ensp \thicksp \hairsp
- Formule predefinite: \binomial (𝑎 + 𝑏)^𝑛 = ∑_(𝑘 = 0)^𝑛 ▒(𝑛¦𝑘)𝑎^𝑘 𝑏^(𝑛 − 𝑘) \identitymatrix (■(1&0&0@0&1&0@0&0&1)) \limit lim_(n→∞)⁡〖(1+1/n)^n〗 =e \quadratic x=(-b±√(b^2-4ac))/2a \integral 1/2π ∫_0^2π ▒ⅆθ/(a+b sin θ)=1/√(a^2-b^2)

CUPRINS	
Calcul real	Preliminarii | Calcul diferenţial | Calcul integral
Analiză complexă	
Calcul multivariabil	Spaţiul $\mathbb{R}^n$ |Limită a unei funcţii |Continuitate | Derivabilitate |Integrală | Spaţii topologice
Analiză matematică abstractă	Spaţii topologice
Anexe	

Resurse

- A Course in Mathematical Analysis (Volume I: Foundations and Elementary Real Analysis, Volume II: Metric and Topological Spaces, Functions of a Vector Variable, Volume III: Complex Analysis, Measure and Integration) (Scribd)
- THE CALCULUS PAGE PROBLEMS LIST
- Schaum's – 3.000 Solved Problems in Calculus
- A Collection of Problems in Differential Calculus
- Calculus 2 Solved Problems
- ExampleProblems.com
- Calculus Website
- Exercises and Problems in Calculus
- Paul's Online
- WolframAlpha_Examples
- Ion Crăciun – Analiză matematică
- Analysis (Sever Angel Popescu)
- E. Kaslik, L. Tănasie – Calcul diferenţial şi integral
- Geometria curbelor şi suprafeţelor
- Ecuaţii diferenţiale (Gheorghe Aniculăesei)
- Curs de geometrie (Andrei-Dan Halanay)
- Culegere anul I
- Alina Gavriluţ – Spaţii metrice (13 cursuri)
- Lefter – Curs Analiză
- Atanasiu & Tofan - Analiză – Funcţii cu mai multe variabile
- Colţescu &Dogaru – Calcul diferenţial
- Procopiuc - Analiză şi ecuaţii diferenţiale
- Analiza-matematica-Cringanu
- Duda & Trandafir - Culegere
- Procopiuc & Ispas - Analiza-Matematica-Culegere
- Curs analiză pentru ingineri electronişti
- Elemente de calcul diferenţial pe dreapta reală
- Scerbaţchi - Curs de analiză
- Metode-de-calcul-in-analiza-matematica-de-C-Dumitrescu-F-Smarandache
- Mădălina Roxana Buneci - Curs
- Florin Iacob - Analiză
- Academia Militară – Calcul diferenţial
- Duda & Grădinaru – Calcul integral cu aplicaţii
- 275-exercices-et-problemes-d'analyse
- Matepedia.ro
- http://math.etc.tuiasi.ro/apletea/
- Teoreme de Analiză Matematică - I (teorema Weierstrass-Bolzano)
- Teoreme de Analiză Matematică - II (teorema Borel - Lebesgue)
- Bogdan Marcel – Analiză complexă
- Understanding Multivariable Calculus
- Matematici speciale (Munteanu)
- Mecanica (Octavian)
- Analiză (sinteză Instalaţii)

- Matematici speciale (G. Popescu)
- Analiză complexă (Bogdan Marcel)
- Exercices de Math Sup
- Math.univ-lyon1.fr
- Compléments d'intégration
- Real Variables with Basic Metric Space Topology
- Help Engineers Learn Mathematics
- Functions of a Complex Variable
- Probleme de mecanică analitică
- Recueil d'exercices sur le calcul infinitesimal (Frenet)
- Mathematical Analysis (Predoi&Bălan)
- Teme Analiză (Constantinescu&Racila)
- Analiza_matematica_(Daniel_Dăianu)

CUPRINS	
Calcul real	Preliminarii | Calcul diferențial | Calcul integral
Analiză complexă	
Calcul multivariabil	Spaţiul $\mathbb{R}^n$ | Limită a unei funcţii | Continuitate | Derivabilitate | Integrală | Spaţii topologice
Analiză matematică abstractă	Spaţii topologice
Anexe	

Index