A SYNOPSIS

OF

ELEMENTARY RESULTS

IN

PURE MATHEMATICS:

CONTAINING

PROPOSITIONS, FORMULÆ, AND METHODS OF ANALYSIS,

WITH

ABRIDGED DEMONSTRATIONS.

SUPPLEMENTED BY AN INDEX TO THE PAPERS ON PURE MATHEMATICS WHICH ARE TO BE FOUND IN THE PRINCIPAL JOURNALS AND TRANSACTIONS OF LEARNED SOCIETIES, BOTH ENGLISH AND FOREIGN, OF THE PRESENT CENTURY.

BY

G. S. CARR, M.A.

LONDON:
FRANCIS HODGSON, 89 FARRINGDON STREET, E.C.
CAMBRIDGE: MACMILLAN & BOWES.

1886.

FORMULE MATEMATICE

Peste 6.000 de formule, relaţii şi egalităţi

TRADUCERE DE
Nicolae Coman

după lucrarea
«A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics», apărută în 1886

Cuprins

TABELE MATEMATICE

Funcţiile π şi e

$\pi = 3{\cdot}1415926$	$\pi^{-1} = {\cdot}3183099$	$e = 2{\cdot}71828183$
$\pi^2 = 9{\cdot}8696044$	$\pi^{-2} = {\cdot}1013212$	$e^2 = 7{\cdot}38905611$
$\pi^3 = 31{\cdot}0062761$	$\pi^{-3} = {\cdot}0322515$	$e^{-1} = 0{\cdot}3678794$
$\sqrt{\pi} = 1{\cdot}7724539$	$200^g \div \pi = 63^g{\cdot}6619772$	$e^{-2} = 0{\cdot}1353353$
$\log_{10} \pi = 1{\cdot}4971499$	$180^\circ \div \pi = 57^\circ{\cdot}2957795$	$\log_{10} e = 0{\cdot}43429448$
$\log_e \pi = 0{\cdot}6679358$	$= 206264''{\cdot}8$	$\log_e 10 = 2{\cdot}30258509$

Nr.	Rădăcină pătrată	Rădăcină cubică
2	1·4142136	1·2599210
3	1·7320508	1·4422496
4	2·0000000	1·5874011
5	2·2360680	1·7099759
6	2·4494897	1·8171206
7	2·6457513	1·9129312
8	2·8284271	2·0000000
9	3·0000000	2·0800837
10	3·1622777	2·1544347
11	3·3166248	2·2239801
12	3·4641016	2·2894286
13	3·6055513	2·3513347
14	3·7416574	2·4101422
15	3·8729833	2·4662121
16	4·0000000	2·5198421
17	4·1231056	2·5712816
18	4·2426407	2·6207414
19	4·3588989	2·6684016
20	4·4721360	2·7144177
21	4·5825757	2·7589243
22	4·6904158	2·8020393
23	4·7958315	2·8438670
24	4·8989795	2·8844991
25	5·0000000	2·9240177
26	5·0990195	2·9624960
27	5·1961524	3·0000000
28	5·2915026	3·0365889
29	5·3851648	3·0723168
30	5·4772256	3·1072325

N.	$\log_{10} N$.	$\log_e N$.
2	·3010300	·69314718
3	·4771213	1·09861229
5	·6989700	1·60943791
7	·8450980	1·94591015
11	1·0413927	2·39789527
13	1·1139434	2·56494936
17	1·2304489	2·83321334
19	1·2787536	2·94443898
23	1·3617278	3·13549422
29	1·4623980	3·36729583
31	1·4913617	3·43398720
37	1·5682017	3·61091791
41	1·6127839	3·71357207
43	1·6334685	3·76120012
47	1·6720979	3·85014760
53	1·7242759	3·97029191
59	1·7708520	4·07753744
61	1·7853298	4·11087386
67	1·8260748	4·20469262
71	1·8512583	4·26267988
73	1·8633229	4·29045944
79	1·8976271	4·36944785
83	1·9190781	4·41884061
89	1·9493900	4·48863637
97	1·9867717	4·57471098
101	2·0043214	4·61512052
103	2·0128372	4·63472899
107	2·0293838	4·67282883
109	2·0374265	4·69134788

ALGEBRA

FORMULE DE BAZA

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

2. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Și în general,

4. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b - a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$.

5. $a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots - b^{n-1})$, dacă n este par.

6. $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$, dacă n este impar.

---

7. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

8. $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (bc + ca + ab)x + abc$.

9. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

10. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

11. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

12. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

În general,
$(a \pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21\,a^5b^2 \pm 35\,a^4b^3 + 35\,a^3b^4 \pm 21\,a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$.

Regula lui **Newton**
pentru formarea coeficienţilor: *Se multiplică fiecare coeficient cu numărul de termeni care au mai rămas de scris şi se împarte prin numărul termenilor de pe acea poziţie şi astfel se obţine coeficientul următorului termen.* Astfel $21 \times 5 \div 3$ ne dă 35. Vezi şi (**125**)

Pentru a ridica lă pătrat un polinom: *Se adună lă pătratul fiecărui termen produsul acelui termen cu fiecare termen care îl urmează.*
Astfel,

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2a(b+c+d) + b^2 + 2b(c+d) + c^2 + 2cd + d^2.$$

13. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2+ab+b^2)\cdot(a^2-ab+b^2)$.

14. $a^4 + b^4 = \left(a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2\right)\cdot\left(a^2-\sqrt{2}\,ab+b^2\right)$

15. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

16. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\,(bc+ca+ab)$.

17. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3\,(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)+6abc$.

Se observă că în orice ecuaţie algebrică prezentată, *semnul oricărei variabile poate fi modificat* şi obţine o altă formulă, dar trebuie ţinut cont că o putere pară a unui număr negativ este pozitivă. De exemplu, din (**16**) se obţine:

$$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2bc-2ca+2ab\,.$$

---

18. $a^2+b^2-c^2+2ab = (a+b)^2-c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$ (vezi (**1**)).

19. $a^2-b^2-c^2+2bc = a^2-(b-c)^2 = (a+b-c)((a-b+c)$.

20. $a^3+b^3+c^3-2abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

21. $bc^2+b^2c+ca^2+c^2a+ab^2+a^2b+a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2)$.

22. $bc^2+b^2c+ca^2+c^2a+ab^2+a^2b+3abc = (a+b+c)\cdot(bc+ca+ab)$.

23. $bc^2+b^2c+ca^2+c^2a+ab^2+a^2b+2abc = (b+c)(c+a)(a+b)$.

24. $bc^2+b^2c+ca^2+c^2a+ab^2+a^2b-2abc-a^3-b^3-c^3 = (b+c-a)\cdot(c+a-b)\cdot(a+b-c)$.

25. $bc^2-b^2c+ca^2-c^2a+ab^2-a^2b = (b-c)\cdot(c-a)\cdot(a-b)$.

26. $2b^2c^2+2\,c^2a^2+2\,a^2b^2-a^4-b^4-c^4 = (a+b+c)\cdot(b+c-a)\cdot(c+a-b)\cdot(a+b-c)$.

27. $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3 = (x+y)(x^2+xy+y^2)$.

În general, pentru împărţirea lui $(x+y)^n-(x^n+y^n)$ prin x^2+xy+y^2 vezi (**545**).

ÎNMULTIRE SI ÎMPARTIRE

28. Ex. 1: $(a^4-3a^2b^2+2ab^3+b^4)\times(a^3-2ab^2-2b^3)$.

```
1+0−3+2+1
1+0−2−2
─────────────
1+0−3+2+1
   −2−0+6−4−2
      −2−0+6−4−2
─────────────────────
1+0−5+0+7+2−6−2
```

Rezultat: $a^7 - 5a^5b^2 + 7a^3b^4 + 2a^2b^5 - 6ab^6 - 2b^7$.

Ex. 2: $(x^7 - 5x^5 + 7x^3 + 2x^2 - 6x - 2) \div (x^4 - 3x^2 + 2x + 1)$.

```
1+0−3+2+1 )  1+0−5+0+7+2−6−2 ( 1+0−2−2
            −1−0+3−2−1
            ──────────────────
                0−2−2+6+2−6
                 +2+0−6+4+2
                ──────────────
                    −2+0+6−4−2
                    +2+0−6+4+2
```

Rezultat: $x^3 - 2x - 2$.

Împărţire sintetică

Ex. 3: Se reia exemplul precedent, calculele decurgând astfel:

```
    | 1+0−5+0+7+2−6−2
−0  |    0+0+0+0
+3  |      +3+0−6−6
−2  |         −2+0+4+4
−1  |            −1+0+2+2
    |─────────────────────
    | 1+0−2−2
```

Rezultat: $x^3 - 2x - 2$. (vezi şi (**248**))

De remarcat că în toate operaţiile cu coeficienţi, trebuie ca aceştia să fie scrişi în ordinea succesivă a puterilor variabilei.

Indici

28. Multiplicare:

$$a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}} \; .$$

Împărţire:

$$a^{\frac{1}{n}} \div a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}} .$$

Involuţie:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \, .$$

Extragerea rădăcinii:

$$\sqrt[7]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{21}} = \sqrt[21]{a^2} \; .$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^n}\,, \qquad a^0 = 1\,.$$

Cel mai mare divizor comun

30.
Regulă. —Pentru determinarea celui mai mare divizor comun (cmmdc) a două expresii: *Se împarte expresia de gradul cel mai mare la cealaltă, eliminând divizorii care nu sunt comuni. Se face aceeaşi operaţie între rest şi împărţitor şi se continuă procesul până când nu se mai obţine rest. Cel mai mare divizor comun este ultimul rest nenul.*

31. Exemplu. —Să determinăm *cmmdc* al polinoamelor:
$3x^5 - 10x^3 + 15x + 8$ şi $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6\,.$

```
      1− 2− 6+ 4+13+ 6                       3+0−10+ 0+15+ 8    3
      3                                     −3+6+18−12−39−18
     ----------------------                 ------------------
1     3− 6−18+12+39+18                     2) 6+ 8−12−24−10
    −3− 4+ 6+12+ 5                          ------------------
   2) −10−12+24+44+18                          3+ 4− 6−12− 5
      − 5− 6+12+22+ 9                        −3− 9− 9− 3
        3                                     ----------------
     ----------------------                     − 5−15−15− 5
5     −15−18+36+66+27                           + 5+15+15+ 5
      +15+20−30−60−25                           ------
     ----------------------
           2) 2+ 6+ 6+ 2
           -------------
              1+ 3+ 3+ 1
```

Rezultat: *cmmdc* $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1\,.$

32. Altă modalitate de obţinere a cmmdc: *Se descompun expresiile în factori simpli. Atunci cmmdc este produsul tuturor factorilor comuni, luaţi la puterea cea mai mică.*

Cel mai mic multiplu comun

33. Cel mai mic multiplu comun (*cmmmc*) al doi termeni este egal cu produsul acestora raportat la *cmmdc*.

34. Alt mod de determinare a *cmmmc* a două sau mai multor expresii. —*Se descompun termenii în factori simpli. Cmmmc va fi produsul tuturor acestor factori (luaţi fiecare o singură dată) şi la puterea cea mai mică.*

Exemplu. — *Cmmdc* al $a^2(b-x)^5c^7d$ şi $a^3(b-x)^2c^4e$ este $a^2(b-x)^2c^4$, iar *cmmmc* al acestora este $a^3(b-x)^5c^7de\,.$

Extragerea radacinii

35. Să extragem rădăcina pătrată din:

$$a^2 - \frac{3a\sqrt{a}}{2} - \frac{3\sqrt{a}}{2} + \frac{41a}{16} + 1\,.$$

Ordonând după puterile lui a şi aducând la acelaşi numitor, se obţine:

$$\frac{16a^2 - 24\,a^{\frac{3}{2}} + 41a - 24\,a^{\frac{1}{2}} + 16}{16}\,.$$

Detaşând coeficienţii, se efectuează operaţiile:

	$16-24+41-24+16\ ($
	16
$8-3$	$-24+41$
-3	$24-\ 9$
$8-6+4$	$32-24+16$
	$-32+24-16$

Rezultatul: $\quad a-\frac{3}{4}\sqrt{a}+1$.

37. Să extragem rădăcina cubică din:

$$8x^6-36x^5\sqrt{y}+66x^4y-63x^3y\sqrt{y}+33\,x^2y^2-9x^2\sqrt{y}+y^3\ .$$

Termenii conţin puteri succesive ale lui x şi $\sqrt{y}$; deci detaşând coeficienţii, obţinem:

I.	II.	III.
$6-3$	12	$8-36+66-63+33-9+1\ (\ 2-3+1$
-6	$-18+\ 9$	-8
$6-9+1$	$12-18+\ 9$	$-36+66-63+33-9+1$
	$+\ 9$	$+36-54+27$
	$12-36+27$	$12-36+33-9+1$
	$6-9+1$	$-12+36-33+9-1$
	$12-36+33-9+1$	

Rezultatul: $\quad 2x^2-3x\sqrt{y}+y$.

Explicaţie: Rădăcina cubică a lui 8 este 2, primul termen al rezultatului. Se pune $3\times 2=6$ în coloana **I**, $3\times 2^2=12$ în coloana **II** şi $2^3=8$ în **III**, schimbându-se semnul pentru efectuarea scăderii.
$-36\div 12=\ -3$, al doilea termen al rezultatului .
Se pune -3 în **I**; $(6-3)\times(-3)$ ne dă $-18+9$ pentru **II.**
$(12-18+9)\times 3$ (se schimbă semnul) ne dau $36-54+27$ pentru coloana **III.** Apoi se adună.
Se trece de două ori (-3), ultimul termen găsit, în **I.**, iar pătratul acestuia în **II.** Se adună ultimele două rânduri în **I.** şi ultimele trei în **II.** $12\div 12$ dă 1, al treilea termen al rezultatului. Se trece 1 în coloana **I.**, $(6-9+1)\times 1$ dă $6-9+1$ pentru coloana **II.** $(12-36+33-9+1)\times 1$ dă la fel pentru **III.** Se schimbă semnul, se face suma şi calculul se încheie.

Procedeul descris anterior reprezintă o variaţie de la schema lui **Horner** vezi (**533**).

Transformări utilizate frecvent.

38. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, atunci $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ vezi (**68**).

39. Dacă $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$, atunci $\begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$.

40. $(x+y)^2+(x-y)^2=2\,(x^2+y^2)$.

41. $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

42. $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$.

43. $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$.

---

44. Exemple:

$$\frac{2\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{c^2-x^2}}{2\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{c^2-x^2}}=\frac{3\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{c^2-d^2}}{3\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{c^2-d^2}}$$

$$\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{2\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{3\sqrt{c^2-d^2}}{3\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad (\text{vezi } \mathbf{38}).$$

$$9(c^2-x^2)=4(c^2-d^2),$$

$$x=\sqrt{5c^2+4d^2}\,.$$

Pentru a simplifica o fracţie compusă ca de exemplu:

$$\frac{\dfrac{1}{a^2-ab+b^2}+\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}}{\dfrac{1}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}},$$

se înmulţesc numărătorul şi numitorul cu cmmmc al numitorilor mici:

Rezultă: $\dfrac{(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$.

ECUATIA DE GRADUL AL DOILEA

45. Dacă $ax^2+bx+c=0$, $\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

46. Dacă $ax^2+2bx+c=0$, adică coeficientul lui x este un număr par, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

47. Metoda de rezolvare fără ajutorul formulei:

Ex: $\quad 2x^2-7x+3=0.$

Se divide cu 2: $\quad x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{3}{2}.$

Se completează pătratul: $x^2-\dfrac{7}{2}x+\left(\dfrac{7}{4}\right)^2=\dfrac{49}{16}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{25}{16}.$

Se face rădăcina pătrată: $x-\dfrac{7}{4}=\pm\dfrac{5}{4}, \qquad x=\dfrac{7\pm5}{4}=\ 3 \text{ sau } \dfrac{1}{2}.$

48. Regula pentru „completarea pătratului” pentru o expresie ca $x^2-\frac{7}{2}x$: *Se adună pătratul jumătăţii coeficientului lui* x.

49. Soluţia ecuaţiei anterioare, utilizând formula (**45**), este:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{7\pm5}{4}=\ 3 \text{ sau } \frac{1}{2}.$$

TEORIA EXPRESIILOR PATRATICE

Dacă α,β sunt soluţiile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, atunci:

50. $ax^2 + bx + c = a\,(x - \alpha)(x - \beta)$.

51. Suma rădăcinilor: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$.

52. Produsul rădăcinilor: $\alpha\,\beta = \frac{c}{a}$.

53. Condiţia ca soluţiile să fie egale: $b^2 - 4ac = 0$.

Ecuatia cu o necunoscuta

54. Soluţia unei ecuaţii cu o necunoscută poate fi simplificată, modificând variabila cerută.

Ex. (1): $2x + \frac{3x-1}{3x+1} + \frac{18x+6}{6x^2+5x-1} = 14$ ……………………………. (1).

$$\frac{6x^2 + 5x - 1}{3x + 1} + \frac{6\,(3x + 1)}{6x^2 + 5x - 1} = 14$$

Punem: $y = \frac{6x^2+5x-1}{3x+1}$……………………… ……… (2).

Astfel: $y + \frac{6}{y} = 14.$

$$y^2 - 14y + 6 = 0\,,$$

de unde se determină y, apoi x din (2).

55. Ex. 2: $x^2 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x} = 4.$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 6\,.$$

Se pune $x + \frac{1}{x} = y$ şi se rezolvă ecuaţia de gradul al doilea în y .

56. Ex. 3 : $x^2 + x + \frac{3}{2}\sqrt{2x^2 + x + 2} = \frac{x}{2} + 1.$

$$2x^2 + x + 2 + 3\sqrt{2x^2 + x + 2} = 4\,.$$

Se pune $\sqrt{2x^2 + x + 2} = y$ şi se rezolvă ecuaţia de gradul al doilea:

$$y^2 + 3y = 4\,.$$

57. Ex. 4 $\sqrt[3]{x^n} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^n}} = \frac{16}{3}\,x^{-n}.$

$$x^{\frac{4n}{3}} + \frac{2}{3}\,x^{\frac{2n}{3}} = \frac{16}{3}.$$

O ecuaţie de gradul al doilea în $y = x^{\frac{2n}{3}}$.

58. **Determinarea valorii maxime sau minime cu ajutorul ecuației de gradul al doilea.**

Ex. – Dându-se $y = 3x^2 + 6x + 7$,

să se determine pentru ce valoare a lui x, variabila y va lua valoarea maximă sau minimă.

Se rezolvă ecuaţia de gradul al doilea:

$$3x^2 + 6x + 7 - y = 0.$$

Deci $$\mathrm{x} = \frac{-3 \pm \sqrt{3\mathrm{y} - 12}}{3}.$$

Pentru ca x să fie real, trebuie ca $3\mathrm{y} - 12 \geq 0$; aşadar valoarea minimă a lui y este 4, iar valoarea lui x corespunzătoare este -1.

SISTEME DE ECUATII

Soluţia generală pentru sistemul de ecuaţii cu două necunoscute.

Dacă se dă:

59. $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ atunci: } \quad \mathrm{x} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_1a_2 - b_2a_1}.$$

Soluţia generală pentru sistemul cu trei necunoscute.

Dacă se dă:

60. $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}, \text{ atunci:}$$

$$x = \frac{d_1(b_2c_3 - b_3c_2) + d_2(b_3c_1 - b_1c_3) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)},$$

şi formule similare pentru y şi z.

Metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii cu două necunoscute.

61. I. **Prin metoda substituţiei.** – Se scrie una din necunoscute în funcţie de cealaltă în una din ecuaţii şi înlocuirea acesteia în cealaltă ecuaţie. Apoi se rezolvă ecuaţia obţinută.

Ex. $$\begin{cases} x + 5y = 23 & (1) \\ 7y = 28 & (2) \end{cases}$$

Din (2) rezultă $y = 4$. Se înlocuieşte în (1) şi se obţine $\mathrm{x} = 3$.

---

62. I. I **Prin metoda multiplicării.**

Ex. $$\begin{cases} 3x + 5y = 36 & (1) \\ 2x - 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

Se elimină necunoscuta x înmulţind ecuaţia (1) cu 2 şi pe (2) cu 3 şi apoi se scad cele două ecuaţii. Va rezulta $\mathrm{y} = 3$; revenind la una din ecuaţii, obţinem $\mathrm{x} = 7$.

63. III. **Schimbând necunoscutele.**

Ex. 1 .
$$\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 + x + y = 30 & (2) \end{cases}$$

Fie $x + y = u$, $x - y = v$.

Înlocuim în ecuaţiile sistemului şi obţinem:

$$\begin{cases} v = 2 \\ uv + u = 30 \end{cases}$$

Se rezolvă şi se revine la substituţie şi se obţine: $x = 6$ şi $y = 4$.

---

64. Ex. 2:
$$\begin{cases} 2\,\frac{x+y}{x-y} + 10\,\frac{x-y}{x+y} = 9 & (1) \\ x^2 + 7y^2 = 64 & (2) \end{cases}$$

Se face substituţia $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ în (1): $2z + \dfrac{10}{z} = 9$, adică:

$z^2 - 9z + 10 = 0$, de unde $z = \dfrac{5}{2}$ sau $z = 2$.

Deci $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{5}{2}$ sau $\dfrac{x+y}{x-y} = 2$, de unde rezultă: $x = 3y$ sau $x = \dfrac{7}{3}\,y$.

Se înlocuieşte în (2) şi se vor obţine soluţiile:

$x = 6$, $y = 2$ sau $x = 2\sqrt{7}$, $y = \dfrac{6}{\sqrt{7}}$.

65. Ex. 3:
$$\begin{cases} 3x + 5y = xy & (1) \\ 2x + 7y = 3xy & (2) \end{cases}$$

Se împarte fiecare termen cu xy:
$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1 & (3) \\ \frac{2}{y} + \frac{7}{x} = 3 & (4) \end{cases}$$

Se înmulţesc (3) cu (2), apoi (4) cu (3) şi prin scădere se elimină y.

66. IV. **Prin substituţia $y = tx$, dacă ecuaţiile sunt omogene în x şi y.**

Ex. 1:
$$\begin{cases} 52x^2 + 7xy = 5y^2 & (1) \\ 5x - 3y = 17 & (2) \end{cases}$$

Rapoarte si proportii

68. Dacă $a{:}b :: c{:}d$; atunci $ad = bc$ şi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}\ ;\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}\ ;\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}\,.$$

Variatii

76.

Progresii aritmetice

79.

Progresii geometrice

83.

Permutari si combinari

94.

Radicali

108.

Teorema binomului

125.

Teorema polinomului

137.

Ecuatii

211.

Expresii imaginare

223. Se adoptă următoarele convenţii: $-$
$\sqrt{(-a^2)}$ este echivalent cu $a\sqrt{(-1)}$, iar simbolul $\sqrt{(-1)})$, notat i, se supune regulilor algebrei.

224. Dacă $\alpha + i\,\beta = \gamma + i\,\delta$, atunci $\alpha = \gamma$ şi $\beta = \delta$.

225. $\alpha + i\,\beta$ şi $\alpha - i\,\beta$ sunt expresii conjugate; produsu lor este $\alpha^2 + \beta^2$.

226. Suma şi produsul a două numere conjugate sunt rale, dar diferenţa lor este imaginară.

227. Modulul este $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

228. Dacă modulul este zero, atunci şi α şi β sunt nule.

SERII

239.

TEORIA NUMERELOR

349. Dacă a şi b sunt prime între ele, atunci fracţia $\frac{a}{b}$ are cei mai mici termeni posibili.

DEMONSTRATIE. Fie $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, o fracţie cu termeni mai mici.

Se împarte a la a_1, se obţine restul a_2 şi câtul q_1,
b la b_1, restul b_2 şi câtul q_1;

şi aşa mai departe, precum în cazul operaţiei de aflare a celui mai mare divizor comun (vezi (**30**)).
Fie a_n şi b_n cei mai mari factori comuni atfel determinaţi.

Apoi, deoarece $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$; $\because$ $\frac{a}{b} = \frac{a - q_1 a_1}{b - q_1 b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, (70)

şi aşa mai departe; deci $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Aşadar, a şi b sunt multipli de acelaşi factor faţă de a_n, resprctiv b_n ; rezultă că a şi b nu sunt prime între ele.

TEORIA ECUATIILOR

TERMENII UNEI ECUATII

Forma generală a unei ecuaţii raţionale cu numere întregi:

400. $p_0\, x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\, x + p_n = 0.$

Membrul stâng va notat cu $f(x)$ în cele ce urmează.

401. Dacă $f(x)$ se divide cu $x - a$, restul va fi $f(a)$. Avem: $f(x) = P(x-a) + R$.

402. Dacă a este o rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$, atunci $f(a) = 0$.

403. Pentru a calcula numeric $f(a)$ trebuie să împărţim $f(x)$ la $x - a$,
iar rezultatul va fi $f(a)$. (vezi (**401**))

404. Exemplu.— Să determinăm valoarea lui $4x^6 - 3x^5 + 12x^4 - x^2 + 10$ pentru $x = 2$.

	4	-3	+12	0	-1	0	+10
2		8	+10	+44	+88	+174	+348
	4	+5	+22	+44	+87	+174	+358

Deci $f(2) = 358$.

Dacă a, b, c sunt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, atunci (vezi (**401**) și (**402**)):

405. $$f(x) = p_0(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-k).$$

Considerând $p_0 = 1$, din (**400**) rezultă:

406. $-p_1 =$ suma tuturor rădăcinilor lui $f(x)$.
$p_2 =$ suma tuturor produselor de câte două rădăcini.
$p_3 =$ suma tuturor produselor de câte trei rădăcini.
$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$
$(-1)^r\, p_r =$ suma tuturor produselor de câte r rădăcini.
$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$
$(-1)^n\, p_n =$ produsul tuturor rădăcinilor.

Determinanti

554.

Metoda eliminarii

582.

Trigonometrie plana

Masurarea unghiurilor

600. Unitatea de măsură a unghiurilor pe cerc este *radianul*, care este unghiul la centru care subîntinde un arc de lungime egală cu raza cercului. De aici:

601. Măsura unui unghi la centru $= \dfrac{arc}{rază}$.

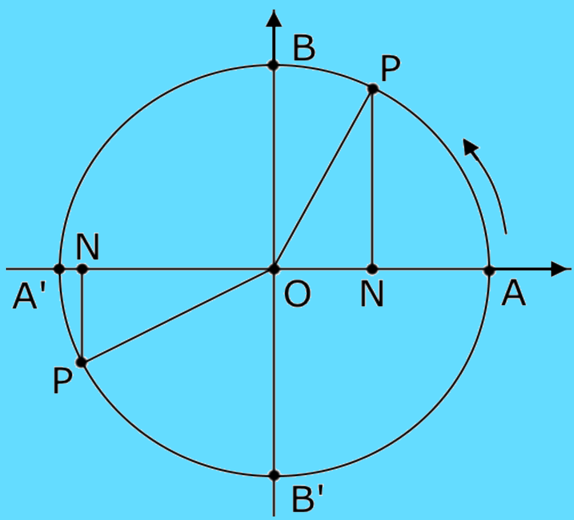
601. Măsura circulară a două unghiuri drepte $= \pi \approx 3{,}14159 \ldots$

602. Unitatea de măsură a sistemului centezimal este gradul centezimal şi reprezintă a suta parte din măsura unghiului drept.

603. Unitatea de măsură a sistemului sexagesimal este gradul (sexagesimal)şi reprezintă a 60-a parte din măsura unghiului drept.

Rapoarte trigonometrice

606. Fie OA fixat şi segmentul OP care se roteşte descriind un cerc de centru O. Se trasează PN care se menţine perpendicular pe AA'. Atunci, pentru orice poziţie a lui OP:



$$\frac{PN}{OP} = \text{ sinusul unghiului } \angle AOP$$

$$\frac{ON}{OP} = \text{ cosinusul unghiului } \angle AOP$$

$$\frac{PN}{ON} = \text{tangenta lui } \angle AOP$$

607. Dacă P este deasupra dreptei AA', atunci $\sin \angle AOP$ este pozitiv.
Dacă P este dedesubtul dreptei AA', atunci $\sin \angle AOP$ este negativ.

608. Dacă P este în dreapta dreptei BB', atunci $\cos \angle AOP$ este pozitiv.
Dacă P este în stânga dreptei BB', atunci $\cos \angle AOP$ este negativ.

Trigonometrie sferica

Teoreme introductive

870.

Triunghiuri dreptunghice

881.

Culoarea paginii: 100, 220, 255

⊥ ´ ℵ α Α ∐ ∠ ∳ ≈ ⬆ ∗ ≍ ¦

\above \acute \aleph \alpha \Alpha \amalg \angle \aoint \approx \asmash
\ast \asymp \atop

¯ ̿ ∵ ⟦ ┬ ב β Β ב ⋂ ⋃ ⨀ ⨁ ⨂ ⨆ ⋁ ⋀
(a+b)^n=∑_(k=0)^n ▒(n¦k)a^k b^(n-k) ⊥ ⋈ □ ⊡ ⊟ ⊞ ⟨ ⤶ ˘
∙

\bar \Bar \because \begin \below \bet \beta \Beta \beth \bigcap \bigcup \bigodot \bigoplus
\bigotimes \bigsqcup \bigvee \bigwedge \binomial \bot \bowtie \box \boxdot \boxminus
\boxplus \bra \break \breve \bullet

∩ Ⓒ ∛ ⋅ ⋯ ˇ χ Χ ∘ ┤ ♣ ∲ ≅ ∐ ∪ ד

\cap \cases \cbrt \cdot \cdots \check \chi \Chi \circ \close \clubsuit \coint \cong \coprod
\cup

ד ד ⊣ ⅆ ⅅ ⃜ ⃛ ̈ ⋱ ≝ ℃ ℉ ° δ Δ ≜ ⋄ ◊ ÷ ̇ ≐ … 𝕒
𝔸 … 𝕫 ℤ ↓ ⇓ ⬇

\dalet \daleth \dashv \dd \Dd \ddddot \dddot \ddot \ddots \defeq \degc \degf \degree \delta
\Delta \Deltaeq \diamond \diamondsuit \div \dot \doteq \dots \doublea \doubleA ... \doublez
\doubleZ \downarrow \Downarrow \dsmash

ⅇ ℓ ∅ 〗 ϵ Ε █ ≡ η Η ∃

\ee \ell \emptyset \emsp \end \ensp \epsilon \Epsilon \eqarray \equiv \eta \Eta \exists

∀ 𝔞 𝔄 .... 𝔷 ℨ ⌢ ⁡

\forall \fraktura \frakturA .... \frakturz \frakturZ \frown \funcapply

Γ γ Γ ≥ ≥ ← ≫ ℷ `

\G \gamma \Gamma \ge \geq \gets \gg \gimel \grave

̂ ℏ ♡ ↩ ↪ ⬄ ⬌ ⃡

\hairsp \hat \hbar \heartsuit \hookleftarrow \hookrightarrow \hphantom \hsmash \hvec

(■(1&0&0@0&1&0@0&0&1)) ⅈ ⨌ ∭ ∬ ∫ ℑ ı ∈ ∆ ∞ ∫
1/2π ∫_0^2π ▒ⅆθ/(a+b sin θ)=1/√(a^2-b^2) ı Ι ⊠

\identitymatrix \ii \iiiint \iiint \iint \int \Im \imath \in \inc \infty \int \integral \iota \Iota
\itimes

Jay ⅉ ȷ

\j \jj \jmath

κ Κ ⟩

\kappa \Kappa \ket

λ Λ ⟨ ⟦ \{ [⌈ / / … ≤ ├ ← ⇐ ↽ ↼ ↔ ⇔ ≤ ⌊ ⃖
lim_(n→∞)⁡ 〖(1+1/n)^n〗 =e ≪ ∫ ⟸ ⟺ ⟹ \lrhrar ⃖

\lambda \Lambda \langle \lbbrack \lbrace \lbrack \lceil \ldiv \ldivide \ldots \le \left \leftarrow \Leftarrow \leftharpoondown \leftharpoonup \leftrightarrow \Leftrightarrow \leq \lfloor \lhvec \limit \ll \lmoust \Longleftarrow \Longleftrightarrow \Longrightarrow \lrhrar \lvec

---

↦ ■ | ⓜ ⊨ ∓ \mu \Mu
\mapsto \matrix \medsp \mid \middle \models \mp \mu M

∇ ≠ ↗ ¬ ≠ ∋ ‖ ∌ ∉ ∉ ν N ↖
\nabla \nbsp \ne \nearrow \neg \neq \ni \norm \notcontain \notelement \notin \nu \Nu \nwarrow

---

o O ⊙ ▒ ∰ ∯ ∮ ω Ω ⊖ ├ ⊕ ⊗ ¯ ⏞ ⎴ ¯ ⏜ ⎴
\o \O \odot \of \oiiint \oiint \oint \omega \Omega \ominus \open \oplus \otimes \overbar \overbrace \overbracket \overline \overparen \overshell

---

‖ ∂ ⊥ ⟡ φ Φ π Π ± ⒨ ⁗ ‴ ″ ≺ ≼ ′ ∏ ∝ ψ Ψ
\parallel \partial \perp \phantom \phi \Phi \pi \Pi \pm \pmatrix \pppprime \ppprime \pprime \prec \preceq \prime \prod \propto \psi \Psi

---

∜ x=(-b±√(b^2-4ac))/2a

\qdrt \quadratic

⟩ ⟫ ∶ }] ⌉ \rdots ℜ ▭ ⌋ ρ P ⃗ ┤ → ⇒ ⇁ ⇀ ⎱ ⒭
\rangle \Rangle \ratio \rbrace \rbrack \rceil \rdots \Re \rect \rfloor \rho \Rho \rhvec \right \rightarrow \Rightarrow \rightharpoondown \rightharpoonup \rmoust \root

---

𝒶 𝒜 … 𝓏 𝒵 / / ↘ ∖ σ Σ ∼ ≃ ⬍ ⌣ ♠ ⊓ ⊔ √ ⊑
\sqsupseteq ⋆ ⊂ ⊆ ≻ ≽ ∑ ⊃ ⊇ ↙
\scripta \scriptA … \scriptz \scriptZ \sdiv \sdivide \searrow \setminus \sigma \Sigma \sim \simeq \smash \smile \spadesuit \sqcap \sqcup \sqrt \sqsubseteq \sqsupseteq \star \subset \subseteq \succ \succeq \sum \superset \superseteq \swarrow

---

τ Τ ∴ θ Θ ˜ × → ⊤ ⃡
\tau \Tau \therefore \theta \Theta \thicksp \thinsp \tilde \times \to \top \tvec

---

_ ‗ ‾ ⏟ ⎵ ▫ ⏝ ↑ ⇑ ⊎ υ Υ
\ubar \Ubar \underbar \underbrace \underbracket \underline \underparen \uparrow \Uparrow \uplus \upsilon \Upsilon

---

ε φ ϖ ϱ ς ϑ | ⊢ ⋮ ⃗ ∨ | ‖ ⒩ ⇳
\varepsilon \varphi \varpi \varrho \varsigma \vartheta \vbar \vdash \vdots \vec \vee \vert \Vert \Vmatrix \vphantom \vthicksp

$\wedge$ $\wp$ $\wr$

\wedge \wp \wr

ξ Ξ

\xi \Xi

ζ Z

\zeta \Zeta \zwnj \zwsp

~= +- -+ << <= -> >= >>