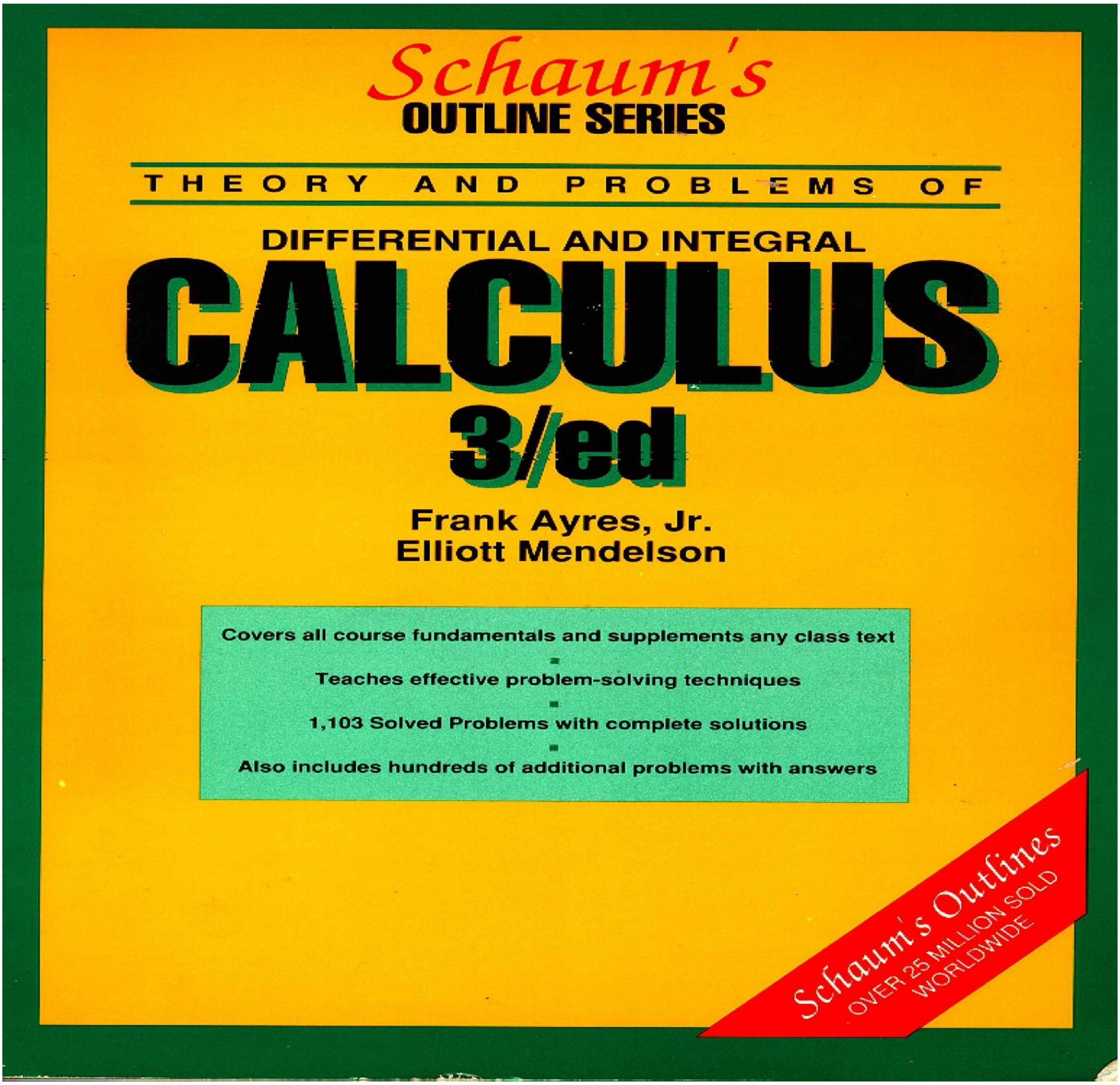
Schaum's OUTLINE SERIES

Teorie şi probleme

de calcul diferenţial şi integral



Traducere: Nicolae Coman
1-1-2016

Cuprins

I. Valoare absolută; Sisteme de coordonate liniare; Inegalităţi

II. Coordonate rectangulare

III. Drepte

I. Valoare absolută; Sisteme de coordonate liniare; Inegalități

Mulţimea numerelor reale este alcătuită din numerele raţionale şi iraţionale.
Deocamdată nu se vor lua în considerare numerele complexe.
Dacă nu se creează confuzii, termenul "număr" va însemna număr real.
Valoarea absolută $|x|$ a numărului x va fi definită astfel:

$$|x| = \begin{cases} x\,, & dacă\ x \geq 0 \\ -x, & dacă\ x < 0 \end{cases}$$

Avem următoarele proprietăţi ale modulului:
(i) $-|x| \leq x \leq |x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;
(ii) $|-x| = |x|$ şi $|x-y| = |y-x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;
(iii) $|x| = |y| \Rightarrow\ x = \pm y,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
(iv) $|x\,y| = |x| \cdot |y|,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ (y \neq 0),\qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
(v) $|x+y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ ("*inegalitatea triunghiului*")

Sistemul de coordonate liniar reprezintă o modalitate de a reprezenta numerele reale pe o dreaptă. Astfel, fiecărui număr real îi corespunde un punct şi invers.
Pentru a defini un sistem de coordonate liniar pe o anumită dreaptă trebuie să alegem:
– un punct pe dreaptă ca fiind originea (care corespunde lui 0);
– un sens pozitiv, indicat de săgeată;
– o distanţă fixă ca unitate de măsură.

Numărul asociat unui punct de pe dreaptă se numeşte *coordonata* acelui punct (fig. 1 – 1).

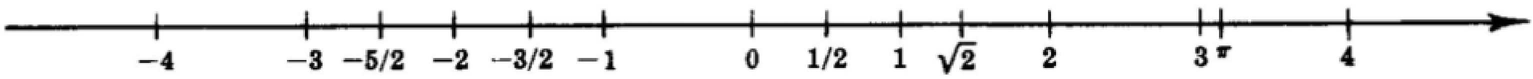


Fig. 1-1

Deoarece nu vom face distincţie între un punct şi coordonata sa, vom spune "*punctul* 1,5" în loc de "*punctul de coordonată* 1,5".
Dacă punctele P_1 şi P_2 au coordonata x_1, respectiv x_2, atunci distanţa dintre puncte este (v. fig. 1 – 2):

$$\overline{P_1P_2} = |x_1 - x_2|$$

Fig. 1-2

Intervale finite. Fie a și b două puncte astfel încât $a < b$. Prin *intervalul deschis* (a, b) se înțelege mulțimea: $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$.
Intervalul închis $[a, b]$ reprezintă mulțimea: $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$.
Se pot defini și intervalele semideschise:

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}, \qquad (a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}.$$

Intervale infinite. Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci se pot defini intervalele infinite:

$$(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}, \ (-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \},$$
$$(a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}, \qquad [a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}.$$

Probleme

1. Indicați intervalele descrise prin relațiile:

a) $-3 < x < 5$;
b) $x > -4$;
c) $|x + 2| < 5$

2. Rezolvați ecuațiile:
$a)$ $|3x - 7| = 8$
$b)$ $\left|\frac{2}{x} - 3\right| < 5$

II. Coordonate rectangulare

În planul $\mathcal{P}$ se alege un sistem de drepte perpendiculare $-$ *axele de coordonate*, cea orizontală fiind numită axa Ox, iar cea verticală Oy , unde O este originea comună a axelor. Fiecărui punct din plan îi corespunde în mod unic un sistem de coordonate a, b, numite *abscisa*, respectiv *ordonata* punctului (v. fig. $2-1$).

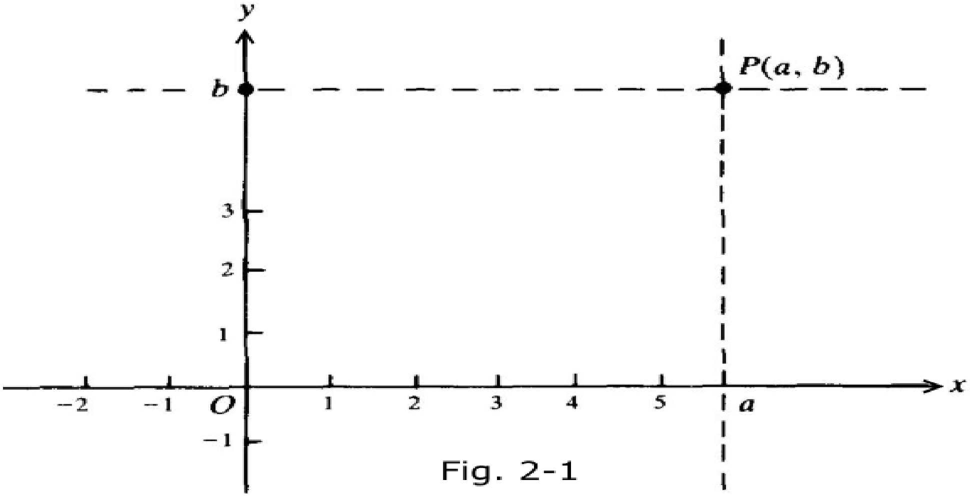


Fig. 2-1

Punctele de pe axa Ox au coordonatele de forma $(a, 0)$, iar cele de pe Oy de forma $(0, b)$.

Formula distanţei. Distanţa dintre puntele $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ este:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Mijlocul unui segment. Mijlocul $M(x, y)$ al segmentului determinat de punctele $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ are coordonatele:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Probleme rezolvate

1. Vom demonstra teorema liniei mijlocii prin utilizarea coordonatelor rectangulare.

Soluţie. Considerăm triunghiul ABC, v. fig. 2-5, unde, pentru simplificare, s-a considerat vârful A situat chiar în originea axelor: $A(0,0)$, punctul B pe axa Ox, $B(b, 0)$ şi punctul $C(u, v)$.

Atunci coordonatele mijlocului M_1 al laturii AC sunt $\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)$, iar cele al mijlocului M_2 al laturii BC sunt $\left(\frac{u+b}{2}, \frac{v}{2}\right)$.

Aplicând formula distanţei:

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{\left(\frac{u}{2} - \frac{u+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2},$$

care este chiar jumătatea lungimii laturii *AB*.

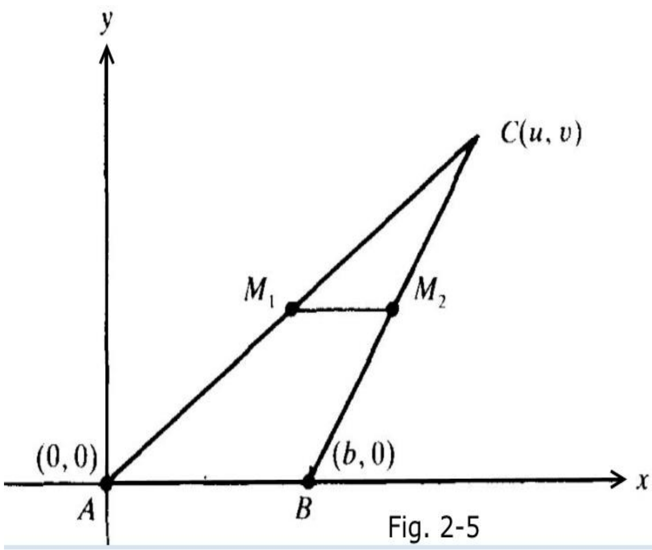


Fig. 2-5

2. Să demonstrăm că dacă două mediane ale unui triunghi au aceeaşi lungime, atunci şi laturile corespunzătoare sunt egale.

Soluţie. Fie M_1, M_2 mijloacele laturilor AC, BC ale triunghiului ABC (fig. 2-8).

Dacă A(0,0) este situat în origine, iar B(b, 0) pe axa Ox, atunci coordonatele lui M_1 sunt:

$$x_1 = \frac{u}{2}, y_1 = \frac{v}{2}$$

şi ale lui M_2 :

$$x_2 = \frac{u+b}{2}, \; y_2 = \frac{v}{2}$$

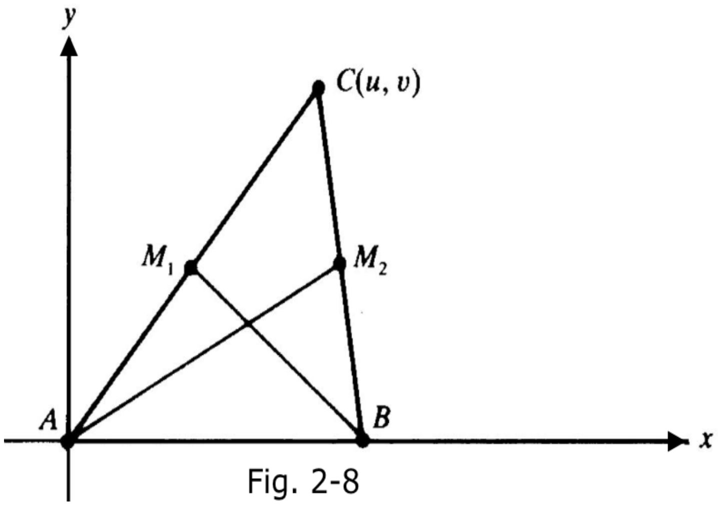


Fig. 2-8

Relaţia $AM_2 = BM_1$ devine:

$$\sqrt{\left(\frac{u+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(b - \frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2}.$$

Se va obţine $b = 2v$, de unde rezultă că:

$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(u-b)^2 + v^2}$, deci $AC = BC$.

3. Să determinăm coordonatele punctului Q(x, y) care împarte segmentul P_1P_2, determinat de punctele $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, în raportul k adică: $\frac{\overline{QP_2}}{\overline{QP_1}} = k$. (v. fig. 2-9)

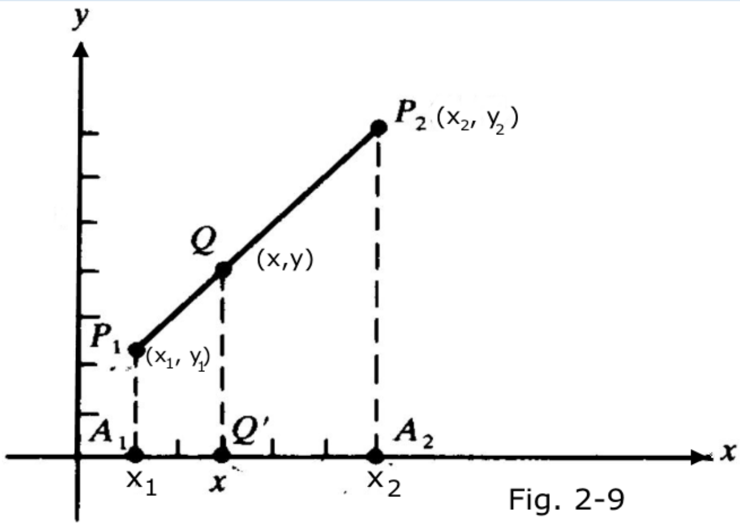


Fig. 2-9

Soluţie.

Proiectând punctele P_1, P_2, Q pe Ox în $A_1(x_1, 0)$, $A_2(x_2, 0)$, respectiv $Q'(x, 0)$, se obţine:

$$\frac{x_2 - x}{x - x_1} = k.$$

Rezultă:

$$x = \frac{x_2 + kx_1}{1+k}$$

La fel şi pentru ordonată: $y = \dfrac{y_2 + ky_1}{1+k}$

Observaţie: Pentru $k = 2$ se obţin coordonatele mijlocului unui segment.

4. Demonstraţi analitic următoarele propoziţii din geometria clasică:

a) Mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este echidistant faţă de vârfurile acestuia.
b) Suma pătratelor distanţelor de la un punct la două vârfuri opuse ale unui dreptunghi este egală suma pătratelor distanţelor la celelalte vârfuri opuse.
c) Suma pătratelor lungimilor laturilor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor diagonalelor.
d) Segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater se intersectează în mijlocul acestora.

III. Drepte

Panta dreptei $\mathcal{L}$ care trece prin punctele $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ este (v. fig. 3-1):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

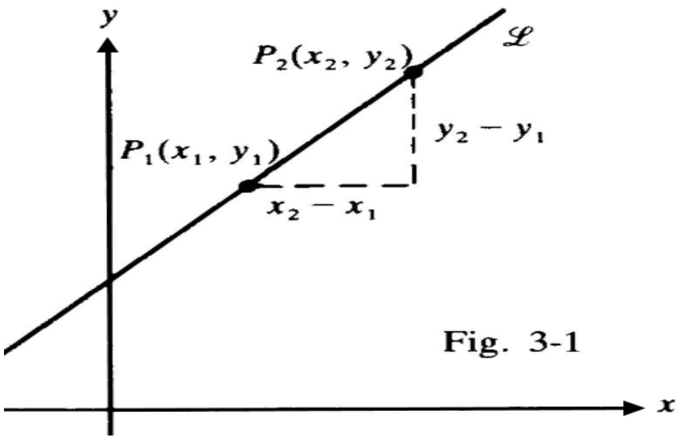


Fig. 3-1

Se poate demonstra că aceasta nu depinde de alegerea punctelor P_1, P_2, cu condiţia $P_1 \neq P_2$.

Semnul pantei este pozitiv dacă şi numai dacă dreapta reprezintă imaginea unei funcţii crescătoare. Dacă dreapta este orizontală (adică paralelă cu Ox), atunci panta este nulă. Dacă dreapta este verticală (paralelă cu Oy) atunci panta este infinită.

În figura 3-6 avem exemple de pante ale unor drepte.

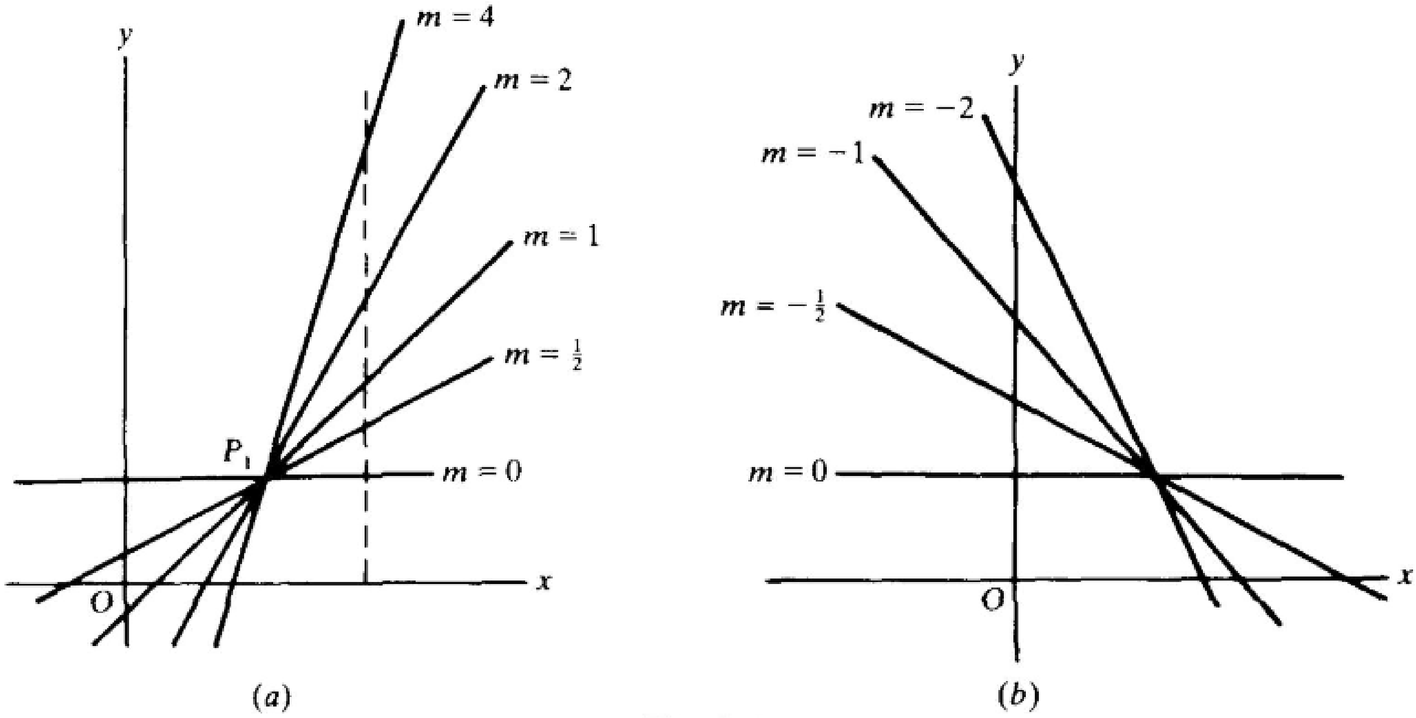


Fig. 3-6

Ecuaţia dreptei. Considerăm dreapta care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ şi are panta m. *D*acă $P(x, y)$este un punct curent al dreptei, atunci:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

de unde obţinem ecuaţia dreptei:

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Drepte paralele. Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă.
De exemplu, dreptele care trec prin punctul $P_1(x_1, y_1)$, respectiv $P_2(x_2, y_2)$ şi au panta m au ecuaţiile:
$y = y_1 + m(x - x_1)$ şi $y = y_2 + m(x - x_2)$.

Drepte perpendiculare. Fie dreptele $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ de pante m_1 şi m_2.
Vom demonstra că $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$ dacă şi numai dacă $m_1 m_2 = -1$.

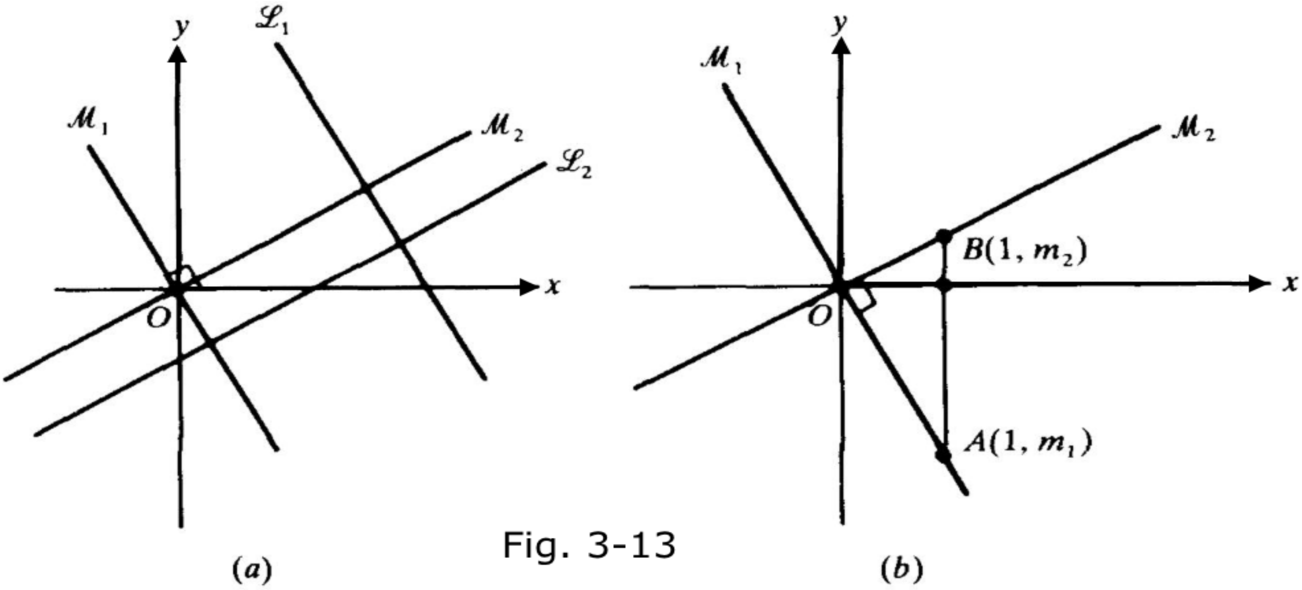


Fig. 3-13

Fie $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ paralelele duse prin origine la aceste drepte (v. fig. 3-13) şi care deci vor avea ecuaţiile:
$(\mathcal{M}_1)\ y = m_1 x \quad (\mathcal{M}_2)\ y = m_2 x$.

Aceste drepte vor intersecta dreapta $x = 1$ în punctele $A(1, m_1)$ şi $B(1, m_2)$.
Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul OAB: $AB^2 = OA^2 + OB^2$, adică:
$(m_1 - m_2)^2 = m_1^2 + 1 + m_2^2 + 1$,
de unde rezultă ceea ce trebuia demonstrat:
$$m_1 m_2 + 1 = 0.$$

Probleme

1. Să se demonstreze că mijloacele laturilor unui patrulater sunt vârfurile unui paralelogram.
Soluţie. Fie punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_C, y_C)$ patru puncte în plan.
Mijloacele laturilor AB şi BC ale patrulaterului ABCD au coordonatele:
$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \ \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ şi respectiv } \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \ \frac{y_B + y_C}{2}\right).$$
Efectuând calculele, se obţine panta dreptei care le uneşte:
$$m = \frac{y_c - y_A}{x_C - x_A}.$$
Aceeaşi valoare se va obţine şi pentru dreapta care uneşte mijloacele celorlalte două segmente.

2. Să se demonstreze că distanţa de la punctul $P(x_0, y_0)$ la dreapta $ax + by + c = 0$ este:
$$d = \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

Type equation here.

Caractere speciale

Caractere speciale

$\overline{abc}$ $\vec{v}$ $\dot{a}$ $\ddot{a}$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ $\sqrt{\quad^2 + \quad^2}$ $\sqrt{\quad}$ - $\widehat{abc}$ $\widetilde{abc}$ $\not\subset$ $\not\supset$