Aliando Menelaus e Lei dos Senos

1. Teorema de Menelaus

Este é um dos mais importantes teoremas da geometria, pois transforma problemas de colinearidade em verificar que um produto de razões é 1.

Teorema de Menelaus. *Sejam P, Q e R pontos sobre os lados AB, BC e CA (ou seus prolongamentos) do triângulo ABC, respectivamente. Os pontos P, Q e R são colineares se, e somente se,*

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1$$

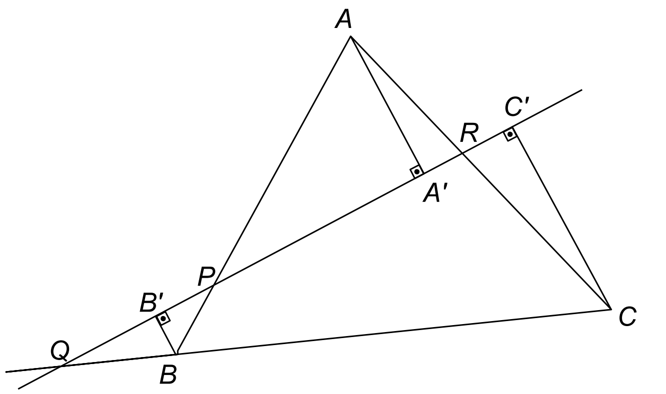
Ou seja, P, Q e R são colineares se vale a conta acima, e essa conta pode ser obtida com semelhanças ou lei dos senos.

Por outro lado, se P, Q e R são colineares então o teorema de Menelaus nos dá uma relação que pode ser útil.

Demonstração

Provaremos primeiro que se P, Q e R são colineares então vale a relação.

Sejam A', B' e C' as projeções ortogonais de A, B e C na reta PQR.



Note que AA', BB' e CC' são paralelas, logo os pares de triângulos PAA', PBB', QBB', QCC' e RCC', RAA' são semelhantes. Portanto, das semelhanças,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{BB'}, \qquad \frac{QB}{QC} = \frac{BB'}{CC'}, \qquad \frac{RC}{RA} = \frac{CC'}{AA'}$$

Multiplicando as três razões acima obtemos a relação desejada.

Agora provemos a recíproca. Suponha, por absurdo, que valha a relação

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1$$

mas que P, Q e R não são colineares.

Seja então R' a interseção de PQ e AC. Então, como acabamos de provar,

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{R'C}{R'A} = 1$$

Comparando as duas últimas equações, obtemos

$$\frac{RC}{RA} = \frac{R'C}{R'A},$$

ou seja, R e R' dividem AC na mesma razão. Logo $R = R'$. ∎

O leitor deve verificar a veracidade do fato para outras posições da reta em relação ao triângulo.

2. Um problema

Problema (Lista 4, preparação para a IMO 2006). *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que AB e CD encontram-se em P e AD e BC encontram-se em Q. Se O é um ponto no interior de $ABCD$ tal que $\angle BOP = \angle DOQ$, prove que $\angle AOB + \angle COD = 180°$.*

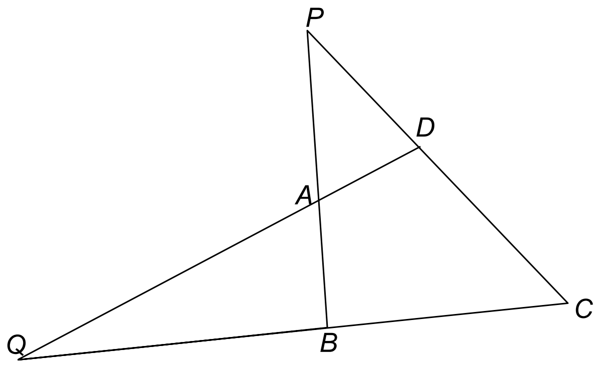
Resolução

Primeiro provaremos o seguinte lema, que pode ser útil para vários problemas, considerando a figura tão freqüente.

Lema. *Sejam AB, CD, AD e BC retas tais que AB e CD se cortam em P e AD e BC se cortam em Q. Então*

$$\frac{PA \cdot PC}{PB \cdot PD} = \frac{QA \cdot QC}{QB \cdot QD}$$

Demonstração



Aplicando o teorema de Menelaus à reta PAB e ao triângulo QCD, obtemos

$$\frac{PC}{PD} \cdot \frac{AD}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BC} = 1$$

Aplicando o teorema de Menelaus agora à reta PCD ao triângulo QAB, obtemos

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{CB}{CQ} \cdot \frac{DQ}{DA} = 1$$

Multiplicando as duas equações, obtemos

$$\frac{PC}{PD} \cdot \frac{AD}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{CB}{CQ} \cdot \frac{DQ}{DA} = 1 \iff \frac{PA \cdot PC}{PB \cdot PD} = \frac{QA \cdot QC}{QB \cdot QD}$$

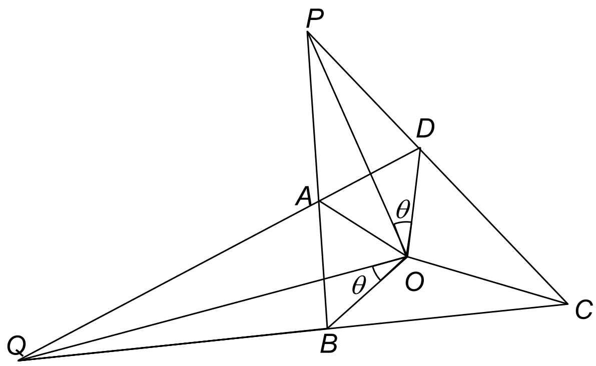
∎

Observe que, como o teorema de Menelaus vale independentemente da posição entre a reta e o triângulo, esse lema também vale independentemente da posição de A, B, C e D.

Esse lema é útil porque serve como um "substituto" para a potência de ponto. A diferença é que esse lema vale mesmo se $ABCD$ não for um quadrilátero inscritível.

Você também pode demonstrar esse lema diretamente com a lei dos senos. Tente!

Voltemos ao problema. Note que $\angle BOP = \angle DOQ$ é equivalente a $\angle BOQ = \angle DOP$.



Devemos provar uma relação entre ângulos a partir de uma outra igualdade de ângulos, mas isso não parece fácil, considerando que na figura há muitos outros ângulos, a maioria diferentes entre si. Assim, parece muito lógico termos que utilizar a lei dos senos ou o teorema de Menelaus ou... ambos! Ao utilizar a lei dos senos, é importante ter algum ponto de partida, ou seja, alguma relação entre medidas para começar, para que tudo pssoa se cortar e obtermos uma equação trigonométrica. O lema acima nos provê essa relação:

$$\frac{PA \cdot PC}{PB \cdot PD} = \frac{QA \cdot QC}{QB \cdot QD}$$

Agora temos que relacionar tudo isso com o ponto O, que é o vértice dos ângulos envolvidos na igualdade que queremos provar. Dá-lhe lei dos senos! E note ainda que os segmentos mais interessantes para fazer as contas são OA, OB, OC e OD. Vamos, então, à lei dos senos. Primeiro, com o ponto P:

$$\frac{PA}{\operatorname{sen} \angle POA} = \frac{OA}{\angle APO} \quad \text{e} \quad \frac{PB}{\operatorname{sen} \angle POB} = \frac{OB}{\angle BPO} \quad \text{e} \quad \frac{PC}{\operatorname{sen} \angle POC} = \frac{OC}{\angle CPO} \quad \text{e} \quad \frac{PD}{\operatorname{sen} \angle POD} = \frac{OD}{\angle DPO}$$

Observando que $\angle APO = \angle BPO$ e $\angle CPO = \angle DPO$, obtemos

$$\frac{PA \cdot PC}{PB \cdot PD} = \frac{OA \cdot OC}{OB \cdot OD} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle POA \cdot \operatorname{sen} \angle POC}{\operatorname{sen} \angle POB \cdot \operatorname{sen} \angle POD}$$

Analogamente,

$$\frac{QA \cdot QC}{QB \cdot QD} = \frac{OA \cdot OC}{OB \cdot OD} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle QOA \cdot \operatorname{sen} \angle QOC}{\operatorname{sen} \angle QOB \cdot \operatorname{sen} \angle QOD}$$

Portanto, do lema,

$$\frac{\operatorname{sen} \angle POA \cdot \operatorname{sen} \angle POC}{\operatorname{sen} \angle POB \cdot \operatorname{sen} \angle POD} = \frac{\operatorname{sen} \angle QOA \cdot \operatorname{sen} \angle QOC}{\operatorname{sen} \angle QOB \cdot \operatorname{sen} \angle QOD}$$

Note que até agora não utilizamos o fato de que $\angle BOP = \angle DOQ$, ou seja, esse fato pode ser utilizado em outros problemas (mas se cair numa prova, demonstre-o!).

Agora vamos utilizar a igualdade de ângulos dada no enunciado. De $\angle BOP = \angle DOQ$ e $\angle BOQ = \angle DOP$, obtemos

$$\operatorname{sen} \angle POA \cdot \operatorname{sen} \angle POC = \operatorname{sen} \angle QOA \cdot \operatorname{sen} \angle QOC$$

Utilizando o bom e velho prostaférese, obtemos

$$\cos(\angle POA + \angle POC) - \cos(\angle POA - \angle POC) = \cos(\angle QOA + \angle QOC) - \cos(\angle QOA - \angle QOC)$$

Mas $\angle POA + \angle POC + \angle QOA + \angle QOC = 360^\circ$ (veja a figura!), logo os co-senos de $\angle POA + \angle POC$ e $\angle QOA + \angle QOC$ são iguais. Portanto

$$\cos(\angle POA - \angle POC) = \cos(\angle QOA - \angle QOC)$$

Considerando que cada diferença é maior ou igual a 0° e menor do que 180°, temos

$$\angle POA - \angle POC = \angle QOA - \angle QOC \text{ ou } \angle POA - \angle POC = \angle QOC - \angle QOA$$

Tendo em mente que $\angle POA + \angle POC + \angle QOA + \angle QOC = 360^\circ$, a primeira equação é equivalente a $\angle POC + \angle QOA = 180^\circ$ e a segunda equação é equivalente a $\angle POA + \angle QOA = 180^\circ$. Mas essa última equivale a dizer que o ângulo $\angle POQ$ é 180°, o que não é possível pois O pertence ao interior do quadrilátero $ABCD$. Logo $\angle POC + \angle QOA = 180^\circ \iff (\angle POC - \angle DOP) + (\angle QOA + \angle BOQ) = 180^\circ \iff \angle COD + \angle AOB = 180^\circ$. ∎