Combinatória 03 - Paridade

Problema 6. Existe alguma solução inteira para a equação $a \cdot b \cdot (a-b) = 45045$?

Solução. Não. Se a e b tiverem paridades diferentes então um dos dois é par, de forma que $a \cdot b$ é par. Mas isso é uma contradição já que 45045 é ímpar.
Agora, se a e b tiverem a mesma paridade então $a-b$ deve ser par e do mesmo modo chegamos a uma contradição.
Logo, não há solução inteira.

Problema 7. Os números $1, 2, \ldots, n$ estão escritos em sequência. É permitido permutar quaisquer dois elementos. É possível retornar à posição inicial após 2001 permutações?

Solução.
Dizemos que uma sequência tem uma inversão quando um número maior vem antes de um número menor.
O número de inversões de uma sequência é o número de pares (a, b) com $a > b$ que podemos encontrar na sequência tais que a aparece antes de b.
Por exemplo, o número de inversões da sequência $(1, 3, 2, 5, 4)$ é 2.
Verifique que ao permutarmos 2 números, a paridade do número de inversões muda.

No problema, a sequência inicial tem 0 inversões. Como são feitas 2001 permutações, temos 2001 mudanças de paridade do número de inversões. Dessa forma, o número de inversões final deve ser ímpar.
Então não podemos ter, ao fim, a sequência inicial.

Problema 8. Um círculo está dividido em seis setores que estão marcados com os números 1, 0, 1, 0, 0, 0 no sentido horário. É permitido somar 1 a dois setores vizinhos. É possível, repetindo esta operação várias vezes, fazer com que todos os números se tornem iguais?

Solução. Suponha que os números nos setores sejam a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 no sentido horário.
Vamos chamar de S o módulo do número $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$.
Note que ao somar 1 a dois setores vizinhos o valor de S não se altera.
Então $S = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 2$.
Desse modo, é impossível que todos os números sejam iguais pois teríamos $S = 0$.

Problema 9. É possível que as seis diferenças entre dois elementos de um conjunto de quatro números inteiros serem iguais a 2, 2, 3, 4, 4 e 6?

Solução. Não. Imagine que o conjunto seja $\{a, b, c, d\}$. Então podemos supor $3 = a - b$.
Mas $a - b = (a - c) + (c - b)$ e $a - c$ e $c - b$ são diferenças de dois elementos do conjunto.
Porém, todas as diferenças, com exceção de 3, são pares. Logo, $(a - c) + (c - b)$ é par.
Isso é uma contradição já que esse valor é igual a 3 que é ímpar.
Concluimos que não é possível que as diferenças sejam essas.

Problema 10. Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

Solução. Suponha que ninguém mentiu. Então Raul tem 17 anos e portanto Kátia tem 15 anos. Mas Kátia tem o dobro da idade de Pedro e, portanto, sua idade deve ser par, contradição.
Logo, alguém deve ter mentido.

Problema 11. (Torneio das Cidades 1987) Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isto?

Solução. Não. Observe que quando Pedro insere uma ficha e recebe cinco seu número de fichas aumenta 4 unidades. Logo, a paridade do número de fichas não muda.
Para ter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas Pedro deve ter um número par de fichas, mas isso não é possível já que ele inicialmente só possui 1 ficha e 1 é ímpar.

Problema 12. (China 1986) Considere uma permutação dos números 1, 1, 2, 2, $\ldots$, 1998, 1998 tal que entre dois números k existem k números. É ou não possível fazer isto?

Solução. Contados da esquerda para a direita, denotemos por a_k e b_k as posições do primeiro e segundo número k, respectivamente. Note que $1 \leq a_k < b_k \leq 2 \times 1998$
Como existem k números entre dois números k's, devemos ter $b_k - a_k = k + 1$. Se é possível escrever os números 1, 1, 2, 2, $\ldots$, n, n em linha como no enunciado, obtemos:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = 1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$$

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots + (b_n - a_n) = 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - 1$$

Somando as duas linhas,

$$2(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \frac{5n(n + 1)}{2}$$

Logo, a fração $\frac{5n(n+1)}{2}$ deve ser um inteiro par.
Para $n = 1998$,

$$\frac{5n(n+1)}{2} = 9985005$$

é ímpar e consequentemente não é possível dispormos esses números em linha.

Problema 13. (Rússia 2004) É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro 9×2004 de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? Justifique sua resposta.

Solução. Suponha que seja possível fazer tal construção. Sejam $L_1, L_2, \ldots, L_9$ as somas dos números de cada uma das 9 linhas, e $C_1, C_2, \ldots, C_{2004}$ as somas dos números de cada uma das 2004 colunas. Como cada L_i e C_j são primos, estes devem ser números ímpares (já que são soma de pelo menos nove inteiros positivos e portanto são maiores que 2). Seja S a soma de todos os números do tabuleiro. Por um lado teríamos:

$$S = L_1 + L_2 + \ldots + L_9$$

donde concluímos que S é ímpar, pois é soma de 9 ímpares. Por outro lado:

$$S = C_1 + C_2 + \ldots + C_{2004}$$

e daqui concluímos que S é par, pois é uma soma de uma quantidade par de ímpares, o que é um absurdo. Logo, tal construção não é possível.

Problema 14. O número A possui 17 dígitos. O número B possui os mesmos dígitos de A, porém em ordem inversa. É possível que todos os dígitos de A + B sejam ímpares?

Solução. Não. Vamos mostrar que algum dos dígitos deve ser par. Considere a seguinte soma:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & a_{16} & a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
+ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
\hline
r_{17} & r_{16} & r_{15} & r_{14} & r_{13} & r_{12} & r_{11} & r_{10} & r_9 & r_8 & r_7 & r_6 & r_5 & r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_0
\end{array}$$

Se r_8 for par (teríamos $r_8 = 2a_8 - 10k$) então o problema acaba. Suponha então que isso não ocorre. A única possibilidade é a de que a soma anterior ficou maior do que ou igual a 10 e 1 foi adicionado a soma dos a_8.
Temos dois casos:

- $a_7 + a_9 = 9$ e a soma deles (acima de r_7) recebeu um 1 da soma anterior, isso implicaria que $r_7 = 0$ e o problema acabaria aqui;

- o segundo caso é $a_7 + a_9 \geq 10$.

Vamos então supor que $a_7 + a_9 \geq 10$.
Repare que se $a_7 + a_9 \geq 10$ então $r_{10} = a_{10} + a_6 + 1 - 10k$.
Se r_{10} e r_6 tiverem paridades diferentes, um dos dois será par e então o problema acaba.
Vamos supor que isso não ocorre. Para que isso não ocorra, a soma acima de r_6 também deve receber um 1 da soma anterior.
Dessa forma, analogamente como fizermos com $a_7 + a_9$, podemos supor que $a_5 + a_{11} \geq 10$.
Usando o mesmo argumenta de paridades diferentes entre r_{12} e r_4 chegamos a suposição de que $a_3 + a_{13} \geq 10$.
Repetindo mais uma vez esse processo nós chegamos em $a_1 + a_{15} \geq 10$.
Com isso, nós concluímos que a soma acima de r_{16} receberá um 1 da soma anterior que é a de $a_{15} + a_1$. Isso quer dizer que $r_{16} = a_{16} + a_0 + 1 - 10k$. Porém, como não há soma antes de r_0, devemos ter $r_0 = a_0 + a_{16} - 10k'$. Note que r_0 e r_{16} têm paridades diferentes e então algum dos dois é par. Isso conclui a demonstração.

Repare que esses argumentos valem para qualquer natural com um número ímpar de dígitos, basta que exista o dígito do meio - nesse caso é o a_8.

Problema 15. Considere um tabuleiro 1998×2002 pintado alternadamente de preto e branco da maneira usual. Em cada casa do tabuleiro, escrevemos 0 ou 1, de modo que a quantidade de 1s em cada linha e em cada coluna do tabuleiro é ímpar. Prove que a quantidade de 1s escritos nas casas brancas é par.

Solução. Seja $a_{i,j}$ o número escrito na casa da i-ésima linha e da j-ésima coluna, $1 \leq i \leq 1998$ e $1 \leq j \leq 2002$. A casa (i, j) é branca se e somente se i e j possuem a mesma paridade.

$$L = \sum_{i=1}^{999} \sum_{j=1}^{2002} a_{2i-1,j}$$

é a soma dos número nas 999 linhas de ordem ímpar. Como a soma dos números de cada linha é ímpar, L é ímpar. De maneira análoga, a soma dos números nas 1001 colunas de ordem par

$$C = \sum_{j=1}^{1001} \sum_{i=1}^{1998} a_{i,2j}$$

também é ímpar. Seja P o conjunto de todas as casas pretas que estão em colunas de ordem par, e $S(P)$ a soma de todos os números escritos nas casas de P.

Cada número escrito em uma casa de P aparece exatamente uma vez na soma L e exatamente uma vez na soma C. Ademais, cada número escrito em uma casa branca aparece exatamente uma vez na soma $L + C$. Assim, a soma dos números escritos nas casas brancas é igual a $L + C - 2S(P)$, que é par.

Problema 16. (Ucrânia 1997) Considere um tabuleiro pintado de preto e branco da maneira usual e, em cada casa do tabuleiro, escreva um número inteiro, de modo que a soma dos números em cada coluna e em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

Solução. A sólução é análoga à do problema anterior.
A casa (i, j) é a casa da i-ésima linha e j-ésima coluna. A casa (i, j) é preta se e somente se i e j têm paridades diferentes.
Seja L_k e C_k a soma dos números nas k-ésima linha e coluna respectivamente. Então,

$$L = L_1 + L_3 + L_5 + L_7 + \dots$$

é a soma dos linhas de ordem ímpar e

$$C = C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + \dots$$

é a soma das colunas também de ordem ímpar. Como a soma dos números em cada coluna e em cada linha é par, L e C devem ser pares.

Seja B o conjunto de todas as casas brancas em colunas de ordem ímpar, e $S(B)$ a somas dos números escritos nas casa de B.

Cada casa de B é contada uma vez em C e uma vez em L. Além disso, cada casa preta é contada exatamente uma vez na soma $L + C$. Logo, a soma dos números nas casas pretas é $L + C - 2S(B)$ que é par.