O teorema de Dilworth

Antes de enunciar o teorema, algumas definições.

1. Relações de ordem

1.1. Definições

Uma *relação de ordem* em A é uma relação $\preceq$ com as seguintes propriedades:

- Reflexiva: para todo $a \in A$, $a \preceq a$.
- Anti-simétrica: para todos $a, b \in A$, $a \preceq b$ e $b \preceq a \implies a = b$.
- Transitiva: para todos $a, b, c \in A$, $a \preceq b$ e $b \preceq c \implies a \preceq c$.

Se para todos $a, b \in A$ ocorre $a \preceq b$ ou $b \preceq a$, então dizemos que $\preceq$ é uma *ordem total*. Caso contrário, $\preceq$ é uma *ordem parcial*.

1.2. Exemplos

- A relação de divisibilidade $|$ em inteiros positivos.
- A relação de inclusão $\subset$ em conjuntos.
- As ordens $\leq$ e $\geq$ usuais.

1.3. Cadeias e anticadeias

Dada uma ordem $\preceq$ em A, uma *cadeia* é uma seqüência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de A tais que $a_1 \preceq a_2 \preceq \ldots \preceq a_n$. Uma cadeia pode ter um único elemento.

Além disso, uma *anticadeia* é um subconjunto B de A tal que se $b \neq c \in B$ então b e c são incomparáveis, ou seja, não ocorre $b \preceq c$ e não ocorre $c \preceq b$. Em outras palavras, $b \npreceq c$ e $c \npreceq b$.

2. Agora sim, o teorema

Teorema de Dilworth. *Seja A um conjunto com a ordem parcial $\preceq$. Então o número mínimo de cadeias que cobrem A é igual à maior cardinalidade de uma anticadeia de A.*

Demonstração

Primeiro, seja B uma anticadeia de A, com k elementos. Então existem pelo menos k cadeias, pois se houvesse menos cadeias, dois elementos de B estariam em uma mesma cadeia e seriam comparáveis, contradição. Assim, se M é a maior quantidade de elementos de uma anticadeia e m é a menor quantidade de cadeias que cobrem A, $M \leq m$.

Assim, basta provar que existe uma anticadeia de tamanho m.

Seja $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ um conjunto de cadeias que cobrem A e seja o *terminal* k_i o maior termo da cadeia c_i segundo $\preceq$. Dizemos que esse conjunto é *minimal* quando não existe outra cadeia com conjunto de terminais contido no conjunto de terminais de $\mathcal{C}$ e com menos elementos.

Provaremos por indução sobre o número de elementos de A que para cada conjunto minimal de m cadeias que cobrem A existe uma anticadeia de tamanho m. Se fizermos isso, o teorema está provado. A base de indução é o caso em que a relação $\preceq$ é vazia: a quantidade de cadeias disjuntas que cobrem A, assim como o tamanho da maior anticadeia, é $|A|$. Suponha que o resultado vale para conjuntos A' com menos elementos do que A.

Seja $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ um conjunto minimal de cadeias que cobrem A e seja o *terminal* k_i o maior termo da cadeia c_i segundo $\preceq$. Se não há $k_i \neq k_j$ com $k_i \preceq k_j$, acabou pois $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ é uma anticadeia. Então suponha, sem perda de generalidade, que $k_2 \preceq k_1$. Note que c_1 não pode conter somente k_1 porque se isso ocorrer juntamos k_1 a c_2 e obtemos um conjunto de $m-1$ cadeias cobrindo A, com todos os terminais de $\mathcal{C}$ exceto k_2, o que contradiz a minimalidade de $\mathcal{C}$. Assim, seja k o termo imediatamente anterior a k_1 na cadeia c_1.

Provemos que o conjunto de cadeias $\mathcal{C}' = \{c_1', c_2, \ldots, c_m\}$, com c_1' sendo c_1 sem k_1, é minimal em $A' = A \setminus \{k_1\}$. Suponha, por absurdo, que existe um conjunto de cadeias $\mathcal{C}''$ com menos de m cadeias e conjunto de terminais contido no conjunto $\{k, k_2, \ldots, k_m\}$ de terminais de $\mathcal{C}'$ que cobre A'. Se uma dessas cadeias termina com k_2, podemos colocar k_1 nela, obtendo um conjunto de cadeias que cobre A com menos que m cadeias, todas com terminais do conjunto de terminais de $\mathcal{C}$; absurdo, pois $\mathcal{C}$, por hipótese, é minimal. Se uma das cadeias de $\mathcal{C}''$ termina em k, mas não há alguma que termine em k_2, junte a essa cadeia k_2 e k_1, obtendo outra contradição. Por fim, se nenhum dos dois elementos k e k_2 é terminal, o conjunto de terminais de $\mathcal{C}''$ tem no máximo $m-2$ elementos. Junte a cadeia unitária $\{k_1\}$ e obtemos $m-1$ cadeias que cobrem A com conjunto de terminais contido no conjunto de terminais de $\mathcal{C}$. Contradição novamente.

Assim $\mathcal{C}'$ é minimal. Pela hipótese de indução, existe uma anticadeia de m elementos, e a indução está completa. ∎

3. Referência bibliográfica

[1] Diestel, R. *Graph Theory*.