Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Potenciação

Oitavo Ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas
Potenciação

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Calcule o valor das expressões:*

a) 3^5.

b) $2^2 + 3^2$.

c) 5^4.

d) $2^3 + 3^3$.

e) $\frac{1}{2} \cdot 2^4 \cdot 3$.

Exercício 2. *Calcule o valor das expressões:*

a) $(0,01)^3$.

b) $100 \cdot \frac{1}{5^2}$.

c) $80 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$.

d) $\frac{1}{3} \cdot (0,3)^2$.

e) $200 \cdot (0,04)^4$.

Exercício 3. *Se $a = 2$ e $b = 3$, calcule o valor das expressões:*

a) $\frac{a^3 b}{b^2}$.

b) a^b.

c) $a^3 b^2$.

d) $(ab^2)^2$.

e) $(b+a)^2 - a^2$.

Exercício 4. *Escreva como um única potência:*

a) $\frac{2^4 \cdot 2^6}{3^7 \cdot 3^3}$.

b) $\frac{4^6 \cdot 8^2}{16^3}$.

c) $(-32)^{3^2}$.

d) $\frac{10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10^{-7} \cdot 10^4}$.

e) $8^3 : 2^{-5}$.

Exercício 5. *Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.*

a) $a^n b^n = (a \cdot b)^n$.

b) $a^{-n} = -a^n$.

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a-b)^n$.

d) $(a^n)^m = a^{nm}$.

e) $(a^n)^m = a^{(n^m)}$.

Exercício 6. *Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.*

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

b) $(a+b)^n = a^n + b^n$.

c) $a^{n+m} = a^n + a^m$.

d) $(a^n)^{-n} = a^0$.

e) Se $a \neq 0$ *então* $a^0 = 1$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. *Calcule as potências:*

a) $(0,3)^2$.

b) $(0,3)^{-2}$.

c) $(-0,02)^3$.

d) $(-3)^{-2}$.

e) $(1,2)^3$

Exercício 8. *Escreva cada um dos seguintes números como uma potência de 2:*

a) $(-0,5)^{-4}$.

b) $[(-0,25)^2]^{-6}$.

c) $16^2 : (0,25)^{-4}$.

d) $32^{-2} : (0,25)^{-4}$.

e) $0,16 \cdot 10^2$.

Exercício 9. *Determine, em cada item, qual dos números é o maior.*

a) $2^{1/2}$ *ou* $2^{1/3}$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ *ou* $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$.

c) $3^{1/5}$ *ou* $5^{1/3}$.

Exercício 10. *Dividindo-se o número* 4^{4^2} *por* 4^4 *obtemos o número:*
(a) 2 *(b)* 4^3 *(c)* 4^4 *(d)* 4^8 *(e)* 4^{12}.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. *Definamos a operação $a \otimes b$ como sendo a^b. Por exemplo, $2 \otimes 3 = 8$. Determine o valor de:*

$$\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2}.$$

(a) $\frac{1}{256}$ *(b)* $\frac{1}{4}$ *(c)* 1 *(d)* 4 *(e)* 256.

Exercício 12. *Para os inteiros a e b definimos $a * b = a^b + b^a$. Se $2 * x = 100$, a soma dos algarismos de $(4x)^4$ é igual a:*
(a) 20 *(b)* 25 *(c)* 30 *(d)* 35 *(e)* 27.

Exercício 13. *Com quantos zeros termina o número $15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7$?*
(a) 10 *(b)* 18 *(c)* 26 *(d)* 13 *(e)* 5.

Exercício 14. *As potências 2^n e 5^n, onde n é um inteiro positivo, começam com o mesmo algarismo d. Qual é este algarismo?*

Exercício 15. *Se $a = 2^{40}$, $b = 3^{20}$ e $c = 7^{10}$, então:*
(a) $c < b < a$ *(b)* $a < c < b$ *(c)* $b < a < c$
(d) $b < c < a$ *(e)* $c < a < b$.

Exercício 16. *Quantos dos números abaixo são maiores que 10?*
$3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$.
(a) 1 *(b)* 2 *(c)* 3 *(d)* 4 *(e)* 5.

Exercício 17. *Quanto vale $\sqrt{12^{12}}$?*
(a) 6^6 *(b)* $2^{2\sqrt{3}}$ *(c)* $2^{12} \cdot 3^6$
(d) 6^{12} *(e)* $\sqrt{12}^{\sqrt{12}}$.

Exercício 18. *Se $2(2^{2x}) = 4^x + 64$, então x é igual a:*
(a) -2 *(b)* -1 *(c)* 1 *(d)* 2 *(e)* 3.

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) 243.

b) $4 + 9 = 13$.

c) 625.

d) $8 + 27 = 35$.

e) $2^{4-1} \cdot 3 = 24$.

2.

a) $0,000001$.

b) 4.

c) $80 \cdot \frac{125}{8} = 1250$.

d) $\frac{1}{3} \cdot 0,09 = 0,03$.

e) $200 \cdot \frac{256}{10000} = 5,12$.

3.

a) $\frac{8}{3}$.

b) 8.

c) 72.

d) 324.

e) $5^2 - 2^2 = 21$.

4.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.

b) 2^6

c) -2^{45}.

d) 10^6.

e) 2^{14}.

5.

a) *Verdadeiro.*

b) *Falso. Por exemplo,* $2^{-1} = \frac{1}{2} \neq -2$.

c) *Falso. Por exemplo,* $\left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4 \neq (2-1)^2 = 1$.

d) *Verdadeiro.*

e) *Falso. Por exemplo,* $(2^2)^3 = 64 \neq 256 = 2^{(2^3)}$.

6.

a) *Verdadeiro.*

b) *Falso. Por exemplo,* $(1+2)^3 = 27 \neq 9 = 1^3 + 2^3$.

c) *Falso. Por exemplo,* $2^{2+1} = 8 \neq 5 = 2^2 + 2^1$.

d) *Falso. Por exemplo,* $(2^2)^{-2} = \frac{1}{16} \neq 1 = 2^0$.

e) *Verdadeiro.*

2 Exercícios de Fixação

7.

a) $0,09$.

b) $\frac{100}{9}$.

c) $-0,000008$.

d) $\frac{1}{9}$.

e) $1,728$.

8.

a) $2^4 = 16$.

b) 2^{24}.

c) 1.

d) 2^{-18}.

e) 2^4.

9.

a) *Como* $2^3 > 2^2$, *segue que*

$$2^{1/2} = (2^3)^{1/6} > (2^2)^{1/6} = 2^{1/3}.$$

b) *Pelo item anterior,* $2^{1/2} > 2^{1/3}$ *e consequentemente* $\frac{1}{2^{1/2}} < \frac{1}{2^{1/3}}$.

c) *Como* $3^3 < 5^5$, *segue que* $3^{1/5} = (3^3)^{1/15} < (5^5)^{1/15} = 5^{1/3}$.

10. $4^{4^2} : 4^4 = 4^{4^2-4} = 4^{12}$. *Resposta E.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

11.

$$\begin{aligned}\frac{2\otimes(2\otimes(2\otimes 2))}{((2\otimes 2)\otimes 2)\otimes 2} &= \frac{2\otimes(2\otimes 4)}{(4\otimes 2)\otimes 2}\\ &= \frac{2\otimes 16}{16\otimes 2}\\ &= \frac{2^{16}}{16^2}\\ &= 2^8.\end{aligned}$$

Resposta E.

12. *Como* $2 * x = 2^x + x^2$ *e* x *é inteiro, devemos ter* $x^2 \in \{1^2, 2^2, \ldots, 10^2\}$. *Dentre os elementos listados, o único possível para o qual* $100 - x^2$ *é uma potência de 2 é* $x^2 = 36$ *pois nesse caso* $x = 6$ *e* $100 - x^2 = 64 = 2^6$. *Consequentemente* $(4x)^4 = 256x^4 = 256 \cdot 1296 = 331776$. *Resposta E.*

13.

$$\begin{aligned}15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7 &= (3^6 \cdot 5^6)\cdot(2^{10}\cdot 7^5)\cdot(5^7\cdot 11^7)\\ &= 3^6 \cdot 11^7 \cdot 5^3 \cdot 10^{10}\end{aligned}$$

Logo, o número termina em 10 *zeros. Resposta A.*

14. *Representemos os dígitos desconhecidos de* 2^n *e* 5^n *com asteriscos. Se* k *e* l *são as quantidades de algarismos de cada um deles, temos:*

$$\begin{aligned}d\cdot 10^k < d***\ldots* &= 2^n < (d+1)\cdot 10^k\\ d\cdot 10^l < d***\ldots* &= 5^n < (d+1)\cdot 10^l\end{aligned}$$

Multiplicando ambas as inequações, obtemos $10^{k+l}\cdot d^2 < 10^n < 10^{k+l}\cdot(d+1)^2$. *Cancelando* 10^{k+l} *em ambos os lados, concluímos que existe uma potência de 10 entre* d^2 *e* $(d+1)^2$. *Analisando os quadrados dos dígitos de 1 até 9, percebemos que isso ocorre apenas para* $d = 3(\ 3^2 < 10 < 4^2)$.

15. $a = 2^{40} = 16^{10}$, $b = 3^{20} = 9^{10}$ *e* $c = 7^{10}$. *Como* $16 > 9 > 7$, *temos* $a > b > c$. *Resposta A.*

16. *Os quadrados dos números são respectivamente:* 99, 112, 125, 108 *e* 98. *Destes, apenas o primeiro e o último são menores que o quadrado de 10 que é 100. Assim, os três números do meio são maiores que 10. Resposta C.*

17. $\sqrt{12^{12}} = 12^6 = (2^2\cdot 3)^6 = 2^{12}\cdot 3^6$. *Resposta C.*

18.

$$\begin{aligned}64 &= 2(2^{2x}) - 4^x\\ &= 2\cdot 2^{2x} - 2^{2x}\\ &= 2^{2x}.\end{aligned}$$

Como $64 = 2^6$, *temos* $2x = 6$. *Resposta E.*

Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Notação Científica e Dízimas

Oitavo Ano

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Escreva os seguintes números na notação científica:*

a) 45673.

b) $0,0012345$.

c) -555.

d) $0,09$

Exercício 2. *Escreva o período dos decimais periódicos:*

a) $0,342342342\ldots$.

b) $58,6777\ldots$.

c) $456,989898\ldots$.

Exercício 3. *Encontre a fração geratriz de:*

a) $0,333\ldots$.

b) $0,121212\ldots$

c) $6,\overline{5}$.

d) $-0,666\ldots$.

Exercício 4. *Obtenha as geratrizes das seguintes dízimas periódicas:*

a) $4,7222\ldots$.

b) $1,8999\ldots$.

c) $1,2010101\ldots$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. *Sem efetuar a divisão, determine se a fração corresponde a um decimal exato ou a uma dízima periódica.*

a) $\dfrac{321}{320}$.

b) $\dfrac{15}{6}$.

c) $\dfrac{41}{15}$.

d) $\dfrac{3}{40}$.

Exercício 6. *Dizemos que um inteiro positivo x está escrito na notação científica se é da forma $x = m \cdot 10^k$ onde k é um inteiro e m satisfaz:*

a) m *é inteiro.*

b) $1 \leq |m| < 10$.

c) $m < 1$.

d) $1 \leq m < 10$.

e) $0 < m < 1$.

Exercício 7. *Assinale qual o maior dentre os números seguintes:*

a) $1,0\overline{1}$.

b) $1,0\overline{12}$.

c) $1,0\overline{102}$.

d) $1,011\overline{25}$.

e) $1,0\overline{11}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. *Considere o número*

$$X = 1,01001000100001\ldots.$$

(O padrão se mantém, ou seja, a quantidade de zeros entre números uns consecutivos sempre aumenta exatamente uma unidade).

a) Qual é a sua 25^a casa decimal após a vírgula?

b) Qual é a sua 500^a casa decimal após a vírgula?

c) O número X é racional ou irracional?

Exercício 9. *Qual é o primeiro dígito não nulo após a vírgula na representação decimal da fração $\dfrac{1}{5^{12}}$?*

(a) 1 *(b)* 2 *(c)* 4 *(d)* 5 *(e)* 7.

Exercício 10. *O valor da expressão*

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot (0,666\ldots)} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{(1,333\ldots)}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

é igual a:

(a) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ *(b)* $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ *(c)* $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

(d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ *(e)* $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Exercício 11. *Observe as multiplicações:*

$$\begin{aligned}
142857 \cdot 1 &= 142857\\
142857 \cdot 2 &= 285714\\
142857 \cdot 3 &= 428571\\
142857 \cdot 4 &= 571428\\
142857 \cdot 5 &= 714285\\
142857 \cdot 6 &= 857142\\
142857 \cdot 7 &= 999999
\end{aligned}$$

Da última multiplicação, podemos concluir que $\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999} = 0,\overline{142857}$. *Veja que as seis primeiras multiplicações produzem números com os mesmos dígitos de* 142857 *e este é exatamente o período da representação decimal de* $\frac{1}{7}$. *Você consegue descobrir um número primo* p *maior que* 7 *tal que o período da dízima que representa* $\frac{1}{p}$ *possui* $p-1$ *casas decimais?*

Exercício 12. *Considere um primo* p *que divide* $10^n + 1$ *para algum* n *inteiro positivo. Por exemplo,* $p = 7$ *divide* $10^3 + 1$. *Analisando o período da representação decimal de* $\frac{1}{p}$, *verifique que o número de vezes que o dígito* i *aparece é igual ao número de vezes que o dígito* $9 - i$ *aparece para cada* $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Exercício 13. *Considere um número primo* p *que não divide* 10 *e suponha que o período da representação decimal de* $\frac{1}{p}$ *seja* $2k$. *É sempre possível decompormos o período em dois blocos de dígitos consecutivos que somam* $10^k - 1$? *Por exemplo, o período de* $\frac{1}{7}$ *tem tamanho* $6 = 2k$ *pois é igual à* 142857. *Veja que* $142 + 857 = 999 = 10^3 - 1 = 10^k - 1$.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) $4,5673 \cdot 10^4$.

b) $1,2345 \cdot 10^{-3}$.

c) $-5,55 \cdot 10^2$.

d) $9 \cdot 10^{-2}$.

2. *a)* 342.

b) 7.

c) 98.

3. *a)*

$$\begin{aligned} x &= 0,333\ldots \\ 10x &= 3,333\ldots \Rightarrow \\ 9x &= 3 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 0,121212\ldots \\ 100x &= 12,121212\ldots \Rightarrow \\ 99x &= 12 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{12}{99} = \dfrac{4}{33}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 6,555\ldots \\ 10x &= 65,555\ldots \Rightarrow \\ 9x &= 59 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{59}{9}$.

d)

$$\begin{aligned} x &= -0,666\ldots \\ 10x &= -6,666\ldots \Rightarrow \\ 9x &= -6 \end{aligned}$$

Logo, $x = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$.

4.

a)

$$\begin{aligned} x &= 4,7222\ldots \\ 10x &= 47,222\ldots \\ 100x &= 472,222\ldots \Rightarrow \\ 90x &= 425 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{425}{90} = \dfrac{85}{18}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 1,8999\ldots \\ 10x &= 18,999\ldots \\ 100x &= 189,999\ldots \Rightarrow \\ 90x &= 171 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{171}{90} = \dfrac{19}{10}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 1,2010101\ldots \\ 10x &= 12,010101\ldots \\ 1000x &= 1201,010101\ldots \Rightarrow \\ 990x &= 1189 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{1189}{990}$.

2 Exercícios de Fixação

5. *a) Decimal exato. Isso ocorre pois o denominador só possui fatores primos* 2 *e* 5.

b) Decimal exato. Isso ocorre pois $\dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$ *e o denominador só possui fator* 2.

c) Dízima periódica. Trata-se de uma fração irredutível com um fator primo no denominador que não é 2 *e nem* 5. *De fato,* $\dfrac{41}{15} = 2,7333\ldots$.

d) Decimal exato. Isso ocorre pois o denominador só possui fatores primos 2 *e* 5.

6. *(B)*

7. *Resposta B.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

8. *a)* 0.

b) Um grupo de k zeros é separado de um grupo seguinte de $k+1$ zeros por exatamente um número 1. Assim, contando até o dígito 1 que sucede um grupo de k zeros, temos:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{algarismos\ zeros}+\underbrace{k}_{algarismos\ uns}=\frac{k(k+3)}{2}.$$

Se $k=30$, já teremos $\frac{30(33)}{2}=495$. Consequentemente a 500^a casa decimal vale zero pois está no grupo com 31 zeros.

c) O número X não é racional porque sua representação decimal não é periódica uma vez que a quantidade de algarismos zeros entre dois 1's consecutivos sempre está aumentando.

9.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5^{12}} &= \frac{1}{5^{12}}\cdot\frac{2^{12}}{2^{12}}\\ &= \frac{2^{12}}{10^{12}}\end{aligned}$$

Como $2^{12}=4096$, o primeiro dígito não nulo após a vírgula é 4. Resposta C.

10. *Veja que*

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot(0,666\ldots)} &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{6}{9}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{6^2\cdot 9}}\\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0-\frac{1}{1,333\ldots}} &= \sqrt{1-\frac{1}{12/9}}\\ &= \sqrt{1-\frac{9}{12}}\\ &= \sqrt{\frac{3}{12}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão procurada é:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\right]^{-1/2} &= \left[\frac{10}{18}\right]^{-1/2}\\ &= \frac{3}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

Resposta E

11. *Um valor possível para p é 17 pois:*

$$\frac{1}{17}=0,05882352994117647.$$

Todos os primos menores que 100 que satisfazem essa propriedade são:

$$7,17,19,23,29,47,59,61,97.$$

Comentário para professores: *Seja p um número primo que não divide 10 e seja n um inteiro com $0<n<p$. Se d é o menor inteiro positivo tal que 10^d-1 é múltiplo de p, é possível mostrar que o período da representação decimal de $\frac{n}{p}$ é exatamente d. No exemplo anterior, como 7 não divide $10^1-1, 10^2-1,\ldots,10^5-1$ e divide 10^6-1, temos $d=6$.*

12. *Podemos escrever $10^n+1=p\cdot a$ onde a é um número com não mais que n dígitos na base 10, digamos $a=a_1a_2\ldots a_n$. Queremos dizer com isso que cada número a_i é um dos dígitos de a. Mesmo que ele possua estritamente menos que n dígitos, podemos colocar alguns a_i's da esquerda como sendo 0. Temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{a}{a\cdot p}\\ &= \frac{a}{10^n+1}\\ &= \frac{a(10^n-1)}{10^{2n}-1}\\ &= \frac{[10^n(a-1)+(10^n-1)-(a-1)]}{10^{2n}-1}\end{aligned}$$

O número 10^n-1 é constituido por n números iguais a 9 e a diferença $(10^n-1)-(a-1)$ reduz cada um desses dígitos 9 por um dígito de a. Assim, a representação decimal do numerador é:

$$a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n-1)(9-a_1)(9-a_2)\ldots(9-a_{n-1})(10-a_n).$$

O numero anterior representa o período da representação de $\frac{1}{p}$ e cada dígito i pode ser pareado com um outro dígito da forma $9-i$. Assim, as quantidades de aparições de tais dígitos são iguais. No exemplo do enunciado, o período de $1/7$ é 142857 e temos os seguintes pareamentos:

$$\begin{aligned}1 &\to 8\\ 4 &\to 5\\ 2 &\to 7\end{aligned}$$

13. *Como $10^{2k}-1=(10^k-1)(10^k+1)$ e p é primo, um dentre 10^k-1 e 10^k+1 é múltiplo de p. Não podemos ter 10^k-1 múltiplo de p pois caso contrário poderíamos escrever $\frac{1}{p}=\frac{(10^k-1)/p}{10^k-1}$ e obteríamos uma dízima periódica com período menor do que $2k$. Sendo assim, p divide*

$10^k + 1$ *e podemos usar repetir a solução anterior para concluir que o período da representação decimal de* $1/p$ *é da forma:*

$a_1a_2 \dots a_{k-1}(a_k - 1)(9 - a_1)(9 - a_2) \dots (9 - a_{k-1})(10 - a_k)$.

Somando o número formado pelos k primeiros dígitos com o número formado pelos k últimos, obtemos $\underbrace{99\dots9}_{k \text{ vezes}} = 10^k - 1$.

Módulo de Expressões Algébricas e Polinômios

Números Irracionais e Reais

Oitavo Ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *No quadro abaixo, determine quais números são irracionais.*

23	$5,345$	$\sqrt{2}$
$2,313131\ldots$	$\frac{1}{3}$	$0,01001000100001\ldots$

Exercício 2. *Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

c) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

d) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$.

e) $\dfrac{35}{5} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

Exercício 3. *Represente em uma reta orientada os seguintes números:*

$$3,5 \quad -\frac{9}{4} \quad 0 \quad \frac{14}{7} \quad 5,\overline{2} \quad -\frac{30}{7}$$

Exercício 4. *Utilizando a calculadora podemos obter que*

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\ldots$$

Agora, também utilizando uma calculadora, calcule os valores abaixo, faça os registro e observe como o resultado se aproxima cada vez mais do número 2.

a) $1,4^2 =$

b) $1,41^2 =$

c) $1,414^2 =$

d) $1,4142^2 =$

Exercício 5. *Com base no exercício anterior, utilizando a calculadora, calcule $\sqrt{3}$. Faça o mesmo procedimento do item anterior, ou seja, calcule o o quadrado do número encontrado apenas com uma casa decimal, depois com duas casas, depois com três e finalmente com quatro casas. Registre os resultados e observe como eles se aproximam cada vez mais de $\sqrt{3}$.*

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. *Compare as raízes abaixo preenchendo os espaços pontilhadas com os símbolos $>$ ou $<$.*

a) $\sqrt{2} \ldots\ldots \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{81} \ldots\ldots \sqrt{121}$.

c) $\sqrt{\frac{4}{100}} \ldots\ldots \sqrt{\frac{16}{25}}$.

d) $\sqrt{0,64} \ldots\ldots \sqrt{0,1}$.

e) $\sqrt{n} \ldots\ldots \sqrt{n+1}$ *com n número real não negativo.*

Exercício 7. *Sem utilizar a calculadora, estime, com uma casa decimal, a melhor aproximação para $\sqrt{11}$?*

Exercício 8. *Sem utilizar a calculadora, estime, com duas casas decimais, uma boa aproximação para $\sqrt{11}$.*

Exercício 9. *Quantos números inteiros positivos existem entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{80}$?*

Exercício 10. *Quantos números inteiros positivos existem entre $\sqrt{37}$ e $\sqrt{1226}$?*

Exercício 11. *Quantos dos números abaixo são maiores que 10?*
$3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$.
(a) 1 *(b)* 2 *(c)* 3 *(d)* 4 *(e)* 5.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. *Explique porque entre dois números racionais sempre podemos encontrar um terceiro número racional.*

Exercício 13. *Dados dois reais positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.*

Exercício 14. *O número $\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ está situado entre $\sqrt{n}$ e $\sqrt{n+2}$, onde n é inteiro positivo. Determine n.*

Exercício 15. *Prove que não é possível escrever $\sqrt{2}$ como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Exercício 16. *Prove que não é possível escrever:*

i $\sqrt{3}$ *como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que* $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

ii $\sqrt{5}$ *como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que* $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

iii $\sqrt{p}$ *como uma fração de inteiros, sendo p um número primo. Ou seja, prove que* $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 17. *É verdade que existem números irracionais A e B tais que A^B é racional?*

Exercício 18. *A sequência F_n de Farey é uma sequência de conjuntos formados pelas frações irredutíveis $\dfrac{a}{b}$ com $0 \le a \le b \le n$ arranjados em ordem crescente. Exibimos abaixo os quatro primeiros termos da sequência de Farey.*

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{0/1, 1/1\} \\
F_2 &= \{0/1, 1/2, 1/1\} \\
F_3 &= \{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\} \\
F_4 &= \{0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1\}
\end{aligned}$$

Qual deve ser o conjunto F_5?

Exercício 19. *É possível mostrar que se duas frações* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *são vizinhas na sequência de Farey* F_n *(veja o exercício anterior) então* $ad - bc = \pm 1$. *Sabendo disso, você consegue determinar que fração* $\frac{a}{b}$ *está imediatamente à esquerda de* $\frac{5}{7}$ *em* F_7 *sem calcular todos os seus elementos?*

Exercício 20. *Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande.*

a) *Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de* 5 *e o outro com capacidade de* 7 *litros.*

b) *Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de* $2-\sqrt{2}$ *e o outro com capacidade de* $\sqrt{2}$ *litros.*

Exercício 21. *Achar o menor inteiro positivo* n *tal que as* 73 *frações*

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$

sejam todas irredutíveis.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. *Números irracionais são aqueles que possuem representação decimal infinita e não periódica. Sendo assim,* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ *e* $0,01001000100001\ldots \in \mathbb{Q}'$ *pois possuem representações decimais não periódicas; ao passo que* $23 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$*,* $5,345 \in \mathbb{Q}$*,* $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$*,* $2,313131... \in \mathbb{Q}$ *possuem representações decimais periódicas.*
Comentário para professores: *Pode ser difícil convencer o aluno em um primeiro contato com os números irracionais que* $\sqrt{2}$ *é irracional e consequentemente nos primeiros exercícios o aluno deverá assumir tal fato. Deixamos a demonstração desta afirmação para o final deste bloco de exercícios e sugerimos que o professor faça o mesmo até seus alunos terem mais familiaridade com as distinções entre os conjuntos numéricos.*

2. *Já sabemos que valem as inclusões* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*. Assim:*

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$*. Verdadeira!*

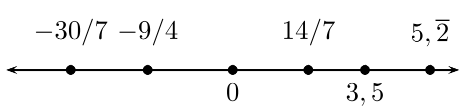
b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$*. Verdadeira!*

c) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$*. Falsa, pois* $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ *é o conjunto das frações não inteiras.*

d) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$*. Verdadeira!*

e) $\dfrac{35}{5} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$*. Falsa, pois* $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ *é o conjunto das frações não inteiras e* $\frac{35}{5} = 7$*.*

3. *Uma representação seria:*



4. *Resposta com o uso da calculadora.*

a) $1,4^2 = 1,96$.

b) $1,41^2 = 1,9881$.

c) $1,414^2 = 1,999396$.

d) $1,4142^2 = 1,99996164$.

5. *Resposta com o uso da calculadora.*

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415059\ldots$$

a) $1,7^2 = 2,89$.

b) $1,73^2 = 2,9929$.

c) $1,732^2 = 2,999824$.

d) $1,7320^2 = 2,999824$.

2 Exercícios de Fixação

6.

a) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{81} < \sqrt{121}$.

c) $\sqrt{\frac{4}{100}} < \sqrt{\frac{16}{25}}$.

d) $\sqrt{0,64} > \sqrt{0,1}$.

e) $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ *com* n.

7. *Observe que* $\sqrt{9} = 3 < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$.
Agora tentemos descobrir a primeira casa decimal após a vírgula:

i $3,1^2 = 9,61$.

ii $3,2^2 = 10,24$.

iii $3,3^2 = 10,89$.

iv $3,4^2 = 11,56$.

Logo, para apenas a descobrirmos a primeira casa decimal, basta observarmos que:

$$3,3^2 < 11 < 3,4^2$$
$$10,89 < 11 < 11,56,$$

Então a melhor aproximação com uma casa decimal será o $3,3$.

8. *Observe que* $\sqrt{11}$ *com uma casa decimal foi aproximado para* $3,3$*. Agora para a casa do centésimo, basta considerarmos os quadradados:*

$$(3,30)^2, (3,31)^2, (3,32)^2, \ldots, (3,39)^2, (3,40)^2.$$

Repetindo o procedimento do exercício anterior, a melhor aproximação será $3,31$.

9. *Como* $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ *e* $\sqrt{64} = 8 < \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9$*. O primeiro inteiro positivo maior que* $\sqrt{8}$ *é* 3 *e o último inteiro menor que* $\sqrt{80}$ *é* 8*. Sendo assim, teremos* 6 *inteiros positivos, a saber* $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

10. *Temos:*

$$\begin{array}{rcl} 6 & = & \sqrt{36} \\ & < & \sqrt{37} \\ & < & \sqrt{49} \\ & = & 7; \\ 35 & = & \sqrt{1225} \\ & < & \sqrt{1226} \\ & < & \sqrt{1296} \\ & = & 36. \end{array}$$

Assim, podemos concluir que o primeiro inteiro positivo maior que $\sqrt{37}$ é 7 e o último inteiro positivo menor que $\sqrt{1226}$ é o 35. Logo, teremos: $35-7+1=29$ inteiros positivos compreendidos entre os números do problema, a saber: $\{7,8,9,\ldots,34,35\}$.

11. *Os quadrados dos números são respectivamente: 99, 112, 125, 108 e 98. Destes, apenas o primeiro e o último são menores que o quadrado de 10 que é 100. Assim, os três números do meio são maiores que 10. Resposta C.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

12. *Dados dois racionais a e b, somando a aos dois lados da desigualdade, temos:*

$$\begin{aligned} a &< b \\ a+a &< b+a \\ 2a &< a+b \\ a &< \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento, agora com b, temos:

$$\begin{aligned} a &< b \\ a+b &< b+b \\ a+b &< 2b \\ \frac{a+b}{2} &< b \end{aligned}$$

O que resulta em: $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ Como $\dfrac{a+b}{2}$ também é um racional, isso mostra que existe um racional entre a e b.

Comentário para professores: *É bom enfatizar que se a construção acima for reiterada com os racionais a e $\dfrac{a+b}{2}$ (ou com $\dfrac{a+b}{2}$ e b) o aluno poderá mostrar que existe uma infinidade de racionais entre a e b. Outros comentários comentários que poderiam instigar os alunos sobre a distribuição dos racionais e dos irracionais na reta seria questioná-los se qualquer intervalo contém números racionais e irracionais.*

13. *(Extraído da UNICAMP) Uma boa estratégia seria eliminar os radicais elevando ambos números a uma potência múltipla de 3 e 4. Veja que:*

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{3})^{12} &= 3^4 \\ &= 81 \\ &> 64 \\ &= 4^3 \\ &= (\sqrt[4]{4})^{12} \end{aligned}$$

Portanto, como $(\sqrt[3]{3})^{12} > (\sqrt[4]{4})^{12}$, segue que $\sqrt[3]{3}$ é o maior.

14. *(Extraído do Colégio Naval) Façamos uma primeira estimativa:*

$$\begin{gathered} 1 < 4 < 8 \\ 1^3 < 4 < 2^3 \\ \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} \\ 1 < \sqrt[3]{4} < 2 \end{gathered}$$

Segunda estimativa:

$$\begin{gathered} 8 < 16 < 27 \\ 2^3 < 16 < 3^3 \\ \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27} \\ 2 < \sqrt[3]{16} < 3 \end{gathered}$$

Finalmente, somando as duas últimas desigulddades obtidas, temos:

$$\begin{gathered} 3 < \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 5 \\ 4 < 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 6 \\ \sqrt{4} < 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < \sqrt{6} \\ \sqrt{4} < \sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} < \sqrt{6} \end{gathered}$$

Portanto, $n=4$.

15. *Vamos supor que é possível termos uma fração irredutível $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*$ tal que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Neste caso, podemos escrever:*

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{m}{n} \\ (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{m}{n}\right)^2 \\ 2 &= \frac{m^2}{n^2} \\ 2n^2 &= m^2 \end{aligned}$$

Agora temos a seguinte situação, o membro da esquerda é par, portanto o da direita também o será. Contudo, não podemos ter m^2 par, se m também não for par. Sendo assim, $m=2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\begin{aligned} m &= 2k \\ m^2 &= 4k^2 \end{aligned}$$

Agora, voltando à equação $2n^2 = m^2$ e substituindo o m^2 pelo $4k^2$, e ficamos com:

$$\begin{aligned} 2n^2 &= m^2 \\ 2n^2 &= 4k^2 \\ n^2 &= 2m^2. \end{aligned}$$

Pelo argumento anterior, n é par, isso contradiz nossa suposição inicial pois tínhamos assumido que a fração $\frac{m}{n}$ era *irredutível. Essa contradição mostra que a suposição inicial é falsa, ou seja, $\sqrt{2}$ não é racional.*

Comentário para professores: *Este é um exemplo clássico de prova por absurdo. Quando mencionado em sala de aula, sugerimos que o professor comente exemplos cotidianos de afirmações que conduzem a absurdos para que os alunos se sintam mais confortáveis com tal demonstração.*

16. *Utilize o mesmo argumento da questão anterior.*

17. *Tome $A = B = \sqrt{2}$. Se o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, o enunciado está satisfeito. Caso contrário, faça $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $B = \sqrt{2}$. Assim, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ servirá como exemplo.*

Comentário para professores: *Já existe uma demonstração de que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é de fato irracional. Um exemplo mais construtivo usando fatos que não são estudados no oitavo ano seria escolher $A = \sqrt{10}$ e $B = \log_{10} 4$. Daí, $A^B = 2$ é um racional.*

18.

$$F_5 = \{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}.$$

19. *Usando a propriedade dada no enunciado, temos $7a - 5b = \pm 1$. Veja que $7a$ deve deixar resto 1 ou 6 na divisão por 5. Dentre os valores possíveis de a no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, apenas 2 e 3 satisfazem tal condição. Se $a = 2$, temos $b = 3$. Se $a = 3$, teremos $b = 4$. Entretanto, como $\dfrac{2}{3} < \dfrac{5}{7} < \dfrac{3}{4}$, a fração procurada é $\dfrac{2}{3}$.*

20. *a) Basta usar três vezes o balde de 5 litros e, em seguida, retirar duas vezes líquido do tambor usando o balde de 7 litros. Dessa forma, transportamos $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ litro.*

b) A quantidade a que podemos transportar de um tambor para o outro é da forma $k(2 - \sqrt{2}) + l(\sqrt{2})$ litros onde k e l são inteiros indicando quantas vezes tiramos ou colocamos líquidos usando cada um dos baldes. Se $l - k \neq 0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a &= k(2 - \sqrt{2}) + l\sqrt{2} \\ a - 2k &= \sqrt{2}(l - k) \\ \frac{a - 2k}{l - k} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Assim, o número $\sqrt{2}$ seria o quociente de dois inteiros o que resultaria em um número racional. Sabemos que isso não pode acontecer porque $\sqrt{2}$ é irracional. Falta analisarmos o que acontece quando $l = k$. A equação se transforma em:

$$\begin{aligned} a &= k(2 - \sqrt{2}) + l\sqrt{2} \\ &= k(2 - \sqrt{2}) + k\sqrt{2} \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Veja que $2k$ é par e assim não podemos levar um valor ímpar como $a = 1$. Em qualquer caso, não é possível colocar exatamente 1 litro usando os baldes com as capacidades dadas neste item.

21. *(Extraído da prova da Cone Sul publicada na Revista Eureka número 5) A fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se e só se $\frac{a}{b-a}$ é irredutível (se a e b tem um fator comum, então a e $b - a$ têm um fator comum, e reciprocamente). O problema se transforma em achar o menor valor de n tal que as frações sejam todas irredutíveis. Observe que as frações anteirores possuem a forma $\dfrac{a}{n+a+2}$ e pelo critério anterior bastaria que $\dfrac{a}{n+2}$ fosse irredutível. Tendo isso em mente, se $n+2$ é um primo maior que 91, todas as frações serão irredutíveis. Assim, um valor possível de n é 95 pois $n+2 = 97$ é um número primo. Verifiquemos que é o menor possível.*

1. *Se $n+2 < 97$ e $n+2$ é par, então n é par e há frações redutíveis como, por exemplo, $\frac{20}{n+2}$.*
2. *Se $19 \leq n + 2 \leq 91$, obviamente há uma fração redutível.*
3. *Se $n + 2 < 19$, então $n + 2$ tem um múltiplo entre 19 e 91 e, portanto, há uma fração redutível.*
4. *Se $n + 2 = 93 = 3.31$, então $\frac{31}{n+2}$ é redutível.*
5. *Se $n + 2 = 95 = 5.19$, então $\frac{19}{n+2}$ é redutível.*

Logo, o valor mínimo de $n + 2$ é 97, que corresponde a $n = 95$.

Módulo de Produtos Notáveis e Fatorações de Expressões Algébricas

Fatoração de Expressões Algébricas

Oitavo Ano

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Siga o modelo e fatore as expressões:*

$$\boxed{3a + ba = a(3 + b)}$$

a) $5a + ba$.

b) $am + an$.

c) $xa + xb + xc$.

d) $ax + a$.

e) $ab + bc + abc$.

Exercício 2. *Simplifique as frações fatorando o denominador e o numerador.*

a) $\dfrac{3a + 5b}{6a + 10b}$.

b) $\dfrac{3x + 3y}{8x + 8y}$.

c) $\dfrac{3a^2 + 5a}{6a + 10}$.

d) $\dfrac{a(x + y) + b(x + y)}{(a - b)x + (a - b)y}$.

e) $\dfrac{x^4 + x^3}{x^2 + x}$.

Exercício 3. *Fatore por agrupamento as seguintes expressões:*

a) $a^2 + ab + ac + bc$.

b) $ax - bx + ay - by$.

c) $2ab + 2a + b + 1$.

d) $ax - bx + 2a - 2b$

e) $10ab - 2b + 15a - 3$

Exercício 4. *Fatore o numerador e o denominador e simplifique a expressão dada:*

a) $\dfrac{m^4 + m^2}{m^2 + 1}$.

b) $\dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2}$.

c) $\dfrac{m^4 + 3m^3 + 2m + 6}{(m + 3)^2}$.

Exercício 5. *Fatore as expressões abaixo usando a diferença de quadrados:*

a) $a^2 - 25b^2$.

b) $4x^2 - 1$.

c) $7 - x^2$.

d) $a^2x^2 - b^2y^2$.

e) $a^4 - b^4$

Exercício 6. *Para cada um dos itens abaixo, decida se a expressão dada é o quadrado de um binômio, isto é, se pode ser escrita na forma:*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou como

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

a) $x^2 - 4x + 3$.

b) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$.

c) $y^2 + 6y + 18$.

d) $4z^2 - 12zy + 9y^2$.

e) $3z^2 + 6z + 3$.

Em caso afirmativo, escreva o binômio.

Exercício 7. *Fatore completamente as expressões abaixo:*

a) $x^4 - 2x^2 + 1$.

b) $5a^2 - 10a + 5$.

c) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

Exercício 8. *Efetue as multiplicações e divisões indicadas como no exemplo:*

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{3ax} \cdot \frac{5xy}{7by} &= \\ \frac{2\cancel{a}\cancel{b}}{3\cancel{a}\cancel{x}} \cdot \frac{5\cancel{x}\cancel{y}}{7\cancel{b}\cancel{y}} &= \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} &= \\ \frac{10}{21} & \end{aligned}$$

a) $\dfrac{4a}{b} \cdot \dfrac{5b}{a}$.

b) $\dfrac{x^3 + x}{3y} \div \dfrac{x^2 + 1}{y^2}$.

c) $\dfrac{yx + x}{(x + 1)^2} \cdot \dfrac{xy + y}{(y + 1)^2}$.

Exercício 9. *Se $xy = 6$ e $x + y = 7$, quanto vale $x^2y + y^2x$?*

2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. *Se, ao adicionarmos* x *ao numerador e subtrairmos* x *do denominador da fração* $\dfrac{a}{b}$, *com* a *e* b *reais, obtemos a fração* $\dfrac{c}{d}$, *com* c *e* d *reais e* $c \neq -d$, *qual o valor de* x*?*

Exercício 11. *Fatore as expressões:*

a) $a^2b - b^3$.

b) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$.

c) $a^4 - 32a^2 + 256$.

Exercício 12. *Verifique que:*

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Em seguida, fatore $x^3 - 8$.

Exercício 13. *No exercício anterior, o que acontece se trocarmos* y *por* $-z$*?*

Exercício 14. *A soma de dois números é 4 e seu produto é 1. Encontre a soma dos cubos desses números.*

Exercício 15. *Se* $xy = x + y = 3$, *calcule* $x^3 + y^3$.

Exercício 16. *Seja* x *um número real tal que* $x + \dfrac{1}{x} = 2$, *calcule* $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Exercício 17. *Qual a forma mais simplificada da expressão* $(a - b)^2 + (-a + b)^2 + 2(a - b)(b - a)$*?*

Exercício 18. *Simplifique a expressão*

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}).$$

Exercício 19. *Fatore completamente* $x^4 + 4$.

Exercício 20. *Verifique que*

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n(n + 3) + 1)^2$$

Exercício 21. *Calcule o valor de:*

$$\sqrt{(2014)(2015)(2016)(2017) + 1}$$

Exercício 22. *Fatore* $p^4 - 1$.

Exercício 23. *Se* $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, *mostre que* x *é um inteiro negativo.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 24. *Fatore* $n^5 + n^4 + 1$.

Exercício 25. *Qual é o menor inteior positivo* n *tal que* $\sqrt{n} - \sqrt{n - 1} < 0,01$

Exercício 26. *Encontre o quociente da divisão de* $a^{32} - b^{32}$ *por*

$$(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$$

Exercício 27. *Verifique que*

$$\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1)\dots(100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1)\dots(100^3 + 1)} = \frac{3367}{5050}.$$

Assim, o valor da expressão é:

$$\frac{2}{100 \cdot 101} \cdot \frac{10101}{3} = \frac{3367}{5050}.$$

Exercício 28. *A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *para* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $F_1 = F_2 = 1$. *Determine o valor de:*

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right)$$

(a) $\dfrac{F_{2016}}{F_{2013}^2}$ *(b)* $\dfrac{F_{2014}}{F_{2013}}$ *(c)* $\dfrac{F_{2015}^2}{F_{2013}^2}$

(d) $\dfrac{F_{2015}}{2}$ *(e)* $\dfrac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}$.

Exercício 29. *Define-se o conjunto de 100 números* $\{1, 1/2, 1/3, ..., 1/100\}$. *Eliminamos dois elementos quaisquer* a *e* b *deste conjunto e se inclui, no conjunto, o número* $a + b + ab$ *ficando assim um conjunto com um elemento a menos. Depois de 99 destas operações, ficamos só com um número. Que valores pode ter esse número?*

Exercício 30. *Verifique que*

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

Exercício 31. *Se* $x + y + z = 0$, *verifique que:*

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Exercício 32. *Fatore a expressão*

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

Exercício 33. *Verifique que:*

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Exercício 34. *Sejam* a, b, c, x, y, z *reais distintos tais que* $ax + by + cz = 0$. *Verifique que*

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}$$

não depende de x, *nem de* y, *nem de* z.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) $a(5+b)$.

b) $a(m+n)$.

c) $x(a+b+c)$.

d) $a(x+1)$.

e) $b(a+c+ac)$.

2. *a)* $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{3}{8}$.

c) $\frac{a}{2}$.

d) $\frac{a+b}{a-b}$.

e) x^2.

3. *a)* $(a+b)(a+c)$.

b) $(a-b)(x+y)$.

c) $(2a+1)(b+1)$.

d) $(a-b)(x+2)$.

e) $(5a-1)(2b+3)$.

4. *a)* m^2.

b) $\frac{x^2+1}{x^2}$.

c) $\frac{m^3+2}{m+3}$.

5.

a) $(a-5b)(a+5b)$.

b) $(2x-1)(2x+1)$.

c) $(\sqrt{7}-x)(\sqrt{7}+x)$.

d) $(ax-by)(ax+by)$.

e) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

6. *a) A expressão não representa um binômio perfeito. Se fosse $b^2 = 3$, deveríamos ter $b = \sqrt{3}$. Entretanto, $-4 \neq -2bx$.*

b) $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x+1/2)^2$.

c) A expressão não representa um binômio perfeito. Se fosse $b^2 = 18$, deveríamos ter $b = 3\sqrt{2}$. Entretanto, $6 \neq 2by$.

d) $4z^2 - 12zy + 9y^2 = (2z-3y)^2$.

e) $3z^2 + 6z + 3 = (\sqrt{3}z + \sqrt{3})^2$.

7.

a) $(x-1)^2(x+1)^2$.

b) $5(a-1)^2$.

c)

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - 2bc - c^2 &= \\ a^2 - (b+c)^2 &= \\ (a-(b+c))(a+(b+c)) &= \\ (a-b-c)(a+b+c). & \end{aligned}$$

8.

a) 20.

b) $\frac{xy}{3}$.

c) $\frac{xy}{(x+1)(y+1)}$.

9.

$$\begin{aligned} x^2y + y^2x &= xy(x+y) \\ &= 6 \cdot 7 \\ &= 42. \end{aligned}$$

2 Exercícios de Fixação

10. *(Extraído do vestibular da UNIVASF) Temos*

$$\begin{aligned} \frac{a+x}{b-x} &= \frac{c}{d} \\ &\Rightarrow \\ cb - xc &= ad + xd. \end{aligned}$$

Isolando os termos com x de um só lado e fatorando-o, obtemos: $cb - ad = xc + xd = x(c+d)$, ou seja, $x = \frac{bc-ad}{c+d}$.

11. *a)* $b(a-b)(a+b)$.

b) $(x-y-3)(x-y+3)$.

c) $(a-4)^2(a+4)^2$

12. *Pela distributividade, temos:*

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2+xy+y^2) &= \\ (x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2}) - (\cancel{yx^2} + \cancel{xy^2} + y^3) &= \\ x^3 - y^3 & \end{aligned}$$

Usando a fatoração fornecida, temos:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4).$$

13. *Se $y = -z$, temos:*

$$\begin{aligned} x^3+z^3 &= \\ x^3+(-y)^3 &= \\ x^3-y^3 &= \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) &= \\ (x+z)(x^2-xz+z^2) & \end{aligned}$$

Obtemos assim uma fatoração para a soma dos cubos dada por:

$$x^3+z^3=(x+z)(x^2-xz+z^2).$$

14. *Se x e y são esses números, temos:*

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) &= \\ (x+y)((x+y)^2-3xy) &= \\ 4\cdot(4^2-3) &= \\ 52 & \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) &= \\ (x+y)((x+y)^2-3xy) &= \\ 3\cdot(3^2-3) &= 18 \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{x^2} &= \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x} &= \\ 2^2-2 &= 2 \end{aligned}$$

17. *(Extraído da Olimpíada Cearense)*

$$\begin{aligned} (a-b)^2+(-a+b)^2+2(a-b)(b-a) &= \\ [(a-b)+(-a+b)]^2 &= 0. \end{aligned}$$

18. *(Extraído da AIME) Aplicando a diferença de quadrados nos dois primeiros parênteses e nos dois últimos, temos:*

$$\begin{aligned} (\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}) &= \\ ((\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-7) &= \\ (4+2\sqrt{30}) & \\ (\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{6}) &= \\ (7-(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2) &= \\ (-4+2\sqrt{30}) & \end{aligned}$$

Assim, o produto é igual à:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{30}+4)(2\sqrt{30}-4) &= \\ 4\cdot 30-16 &= 104. \end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned} x^4+4 &= x^4+4x^2+4-4x^2 \\ &= (x^2+2)^2-4x^2 \\ &= (x^2-2x+2)(x^2+2x+2). \end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned} (n(n+3)+1)^2 &= n^2(n+3)^2+2n(n+3)+1 \\ &= n(n+3)[n(n+3)+2]+1 \\ &= n(n+3)[n^2+3n+2]+1 \\ &= n(n+3)[(n+1)(n+2)]+1 \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \end{aligned}$$

21. *Usando o exercício anterior para $n = 2014$, obtemos* $(2014)(2017)+1$.

22.

$$\begin{aligned} p^4-1 &= (p^2-1)(p^2+1) \\ &= (p-1)(p+1)(p^2+1) \end{aligned}$$

23. *(Extraída do vestibular da UFRJ) Seja $y = \sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}$. Claramente y é um inteiro positivo pois cada um dos radicais o é. Assim, o produto xy possui o mesmo sinal de x. Calculemos tal produto usando diferença de quadrados:*

$$\begin{aligned} xy &= (3-\sqrt{8})-(3+\sqrt{8}) \\ &= -2\sqrt{8}. \end{aligned}$$

Portanto, como $-\sqrt{8}$ é negativo, x também o é.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

24.

$$\begin{aligned} n^5+n^4+1 &= \\ n^5+n^4+n^3-n^3-n^2-n+n^2+n+1 &= \\ n^3(n^2+n+1)-n(n^2+n+1)+(n^2+n+1) &= \\ (n^2+n+1)(n^3-n+1). & \end{aligned}$$

25. *(Extraído da Olimpíada Cearense) Usando diferença de quadrados, temos:*

$$\begin{aligned} \sqrt{n}-\sqrt{n-1} &= \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

Para que o número anterior seja menor que $0,01$, devemos ter:

$$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}>100.$$

Se $n \leq 50^2$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}+\sqrt{n-1} &< 50+\sqrt{2499}\\ &< 100.\end{aligned}$$

Se $n = 50^2+1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}+\sqrt{n-1} &= \sqrt{2501}+50\\ &> 100.\end{aligned}$$

Logo, o menor inteiro positivo que satisfaz a desigualdade do enunciado é $n = 50^2+1$.

26. *Aplicando a diferença de quadrados sucessivamente, temos:*

$$\begin{aligned} a^{32}-b^{32} &=\\ (a^{16}+b^{16})(a^{16}-b^{16}) &=\\ (a^{16}+b^{16})(a^{8}+b^{8})(a^{8}-b^{8}) &=\\ (a^{16}+b^{16})(a^{8}+b^{8})(a^{4}+b^{4})(a^{4}-b^{4}) &=\\ (a^{16}+b^{16})(a^{8}+b^{8})(a^{4}+b^{4})(a^{2}+b^{2})(a^{2}-b^{2}) &=\end{aligned}$$

Assim, o quociente é a^2-b^2.

27. *Note que* $((x+1)^2-(x+1)+1) = (x^2+x+1)$. *Verifiquemos agora uma fração genérica do produto:*

$$\begin{aligned}\frac{x^3-1}{x^3+1} &=\\ \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} &=\\ \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{x^2-x+1}\end{aligned}$$

A primeira parte da última expressão é uma fração onde o numerador e o denominador diferem por 2 *e a segunda parte é um quociente de termos envonvendo a expressão* n^2-n+1 *quando* n *é* $x+1$ *e* x. *Vamos analisar a expressão anterior para cada valor de* x *no conjunto* $\{2,3,\ldots,100\}$. *Primeiramente vejamos o que acontece quando multiplicarmos apenas as frações que constituem a primeira parte da expressão:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{98}}{100}\cdot\frac{\cancel{99}}{101} &=\\ \frac{2}{100\cdot 101}.\end{aligned}$$

A segunda parte produz um cancelamento diferente:

$$\begin{aligned}\frac{\cancel{3^2-3+1}}{2^2-2+1}\cdot\frac{\cancel{4^2-4+1}}{\cancel{3^2-3+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{101^2-101+1}{\cancel{100^2-100+1}} &=\\ \frac{10101}{3}.\end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão é:

$$\frac{2}{100\cdot 101}\cdot\frac{10101}{3} = \frac{3367}{5050}.$$

28. *(Extraído da OBM 2014) Observe que:*

$$\begin{aligned}1-\frac{F_k^2}{F_{k+1}^2} &= \frac{F_{k+1}^2-F_k^2}{F_{k+1}^2}\\ &= \frac{(F_{k+1}-F_k)(F_{k+1}+F_k)}{F_{k+1}^2}\\ &= \frac{F_{k-1}F_{k+2}}{F_{k+1}^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\left(1-\frac{F_3^2}{F_4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right) &=\\ \frac{F_1F_4}{F_3^2}\cdot\frac{F_2F_5}{F_4^2}\cdot\frac{F_3F_6}{F_5^2}\ldots\frac{F_{2012}F_{2015}}{F_{2014}^2} &=\\ \frac{F_1\cancel{F_4}}{\cancel{F_3^2}}\cdot\frac{F_2\cancel{F_5}}{\cancel{F_4^2}}\cdot\frac{\cancel{F_3}\cancel{F_6}}{\cancel{F_5^2}}\ldots\frac{\cancel{F_{2012}}F_{2015}}{\cancel{F_{2014}^2}} &=\\ \frac{F_1\cdot F_2\cdot F_{2015}}{F_3\cdot F_{2013}\cdot F_{2014}} &=\\ \frac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}.\end{aligned}$$

Resposta E.

29. *(Extraído da Olimpíada do Cone Sul) Comecemos analisando alguma relação entre* a, b *e* $a+b+ab$. *O último termo lembra a fatoração:*

$$(a+1)(b+1) = ab+a+b+1.$$

Em cada momento após realizarmos as operações, se analisarmos a quantidade que representa o produto de todos os números do conjunto acrescidos de uma unidade. A equação anterior nos diz que tal produto nunca se altera. Consequentemente, no final teremos um único número x *tal que:*

$$(1+1/2)(1+1/3)\ldots(1+1/100) = (1+x).$$

Ou seja, $x = 99/2$. *Para entender melhor que quantidade estamos analisando, façamos um exemplo pequeno. Suponha que em um dado momento temos os números* 2, 3 *e* 5, *devemos analisar o número*

$$(2+1)(3+1)(5+1).$$

Se trocarmos $a = 2$ *e* $b = 3$ *por* $ab+a+b = 11$ *e fizermos o novo produto obteremos:*

$$(11+1)(5+1).$$

Perceba que o valor continua sendo o mesmo.

30. *Para fazer tal expansão, podemos considerar momentaneamente $x+y=w$ e a expressão que já conhecemos para o binômio:*

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= \\ (w+z)^3 &= \\ w^3+3w^2z+3wz^2+z^3\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}w^3 &= \\ (x+y)^3 &= \\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 &= \\ x^3+y^3+3xy(x+y) &= \\ x^3+y^3+3xyw\end{aligned}$$

Voltando para a expressão original, temos:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= \\ x^3+y^3+z^3+3xyw+3w^2z+3wz^2.\end{aligned}$$

Resta estudarmos o termo:

$$\begin{aligned}3xyw+3w^2z+3wz^2 &= \\ 3w(xy+wz+z^2) &= \\ 3(x+y)(xy+xz+yz+z^2) &= \\ 3(x+y)(x+z)(y+z)\end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z).$$

31. *Na identidade anterior, podemos trocar a soma de quaisquer dois, pelo simétrico do terceiro obtendo:*

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= \\ x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z) &= \\ x^3+y^3+z^3+3(-z)(-y)(-x) &= \\ x^3+y^3+z^3-3xyz.\end{aligned}$$

Como $(x+y+z)^3=0$, segue o resultado.

32. *Sejam $x=b-c$, $y=c-a$ e $z=a-b$. Pelo exercício anterior, como $x+y+z=0$, podemos escrever:*

$$\begin{aligned}(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 &= \\ x^3+y^3+z^3 &= \\ 3xyz &= \\ 3(b-c)(c-a)(a-b).\end{aligned}$$

33. *Para fazer tal expansão, podemos considerar momentaneamente $x+y=w$ e a expressão que já conhecemos para o binômio:*

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= \\ (w+z)^2 &= \\ w^2+2wz+z^2\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}w^2 &= \\ (x+y)^2 &= \\ x^2+2xy+y^2.\end{aligned}$$

Voltando para a expressão original, temos:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= \\ x^2+y^2+z^2+2xy+2wz &= \\ x^2+y^2+z^2+2xy+2(x+y)z &= \\ x^2+y^2+z^2+2xy+2x+2yz\end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

34. *Elevando ao quadrado a igualdade dada, temos*

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx) = 0$$

E consequentemente:

$$-2(abxy+bcyz+cazx) = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

Daí, a expressão $bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2$ é igual a

$$\begin{aligned}& x^2(ab+ac)+y^2(ba+bc)+z^2(ca+cb) \\ & -2(abxy+bcyz+cazx) \\ = \;& x^2(a^2+ab+ac)+y^2(ba+b^2+bc)+ \\ & +z^2(ca+cb+c^2) \\ = \;& ax^2(a+b+c)+by^2(a+b+c)+ \\ & +cz^2(a+b+c) \\ = \;& (ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c).\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2} = \frac{1}{a+b+c},$$

que independe de x, y e z.

Módulo de Porcentagem

Porcentagem

Oitavo Ano

Porcentagens

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Siga o modelo e calcule as porcentagens:*

$$\begin{aligned} 5\% \cdot 130 &= \frac{5}{100} \cdot 130 \\ &= \frac{650}{100} \\ &= 6,5. \end{aligned}$$

a) $10\% \cdot 120$.

b) $7\% \cdot 80$.

c) $15\% \cdot 90$.

d) $0,5\% \cdot 200$.

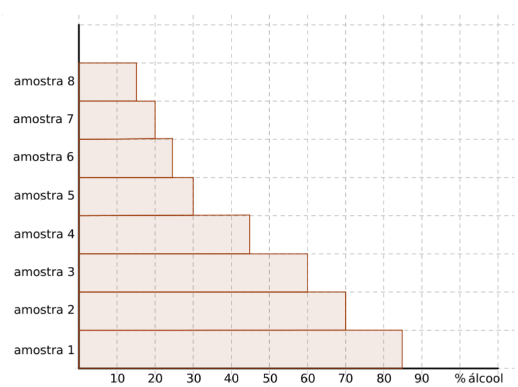
Exercício 2. *Calcule:*

a) o quadrado de 4% *e expresse o resultado como em porcentagens;*

b) a raiz quadrada de 64% *e expresse o resultado em porcentagens;*

c) o valor de 6% *de* 180.

Exercício 3. *Para testar a qualidade de um combustível composto apenas de gasolina e álcool, uma empresa recolheu oito amostras em vários postos de gasolina. Para cada amostra foi determinado o percentual de álcool e o resultado é mostrado no gráfico abaixo. Em quais dessas amostras o percentual de álcool é maior que o percentual de gasolina?*



Exercício 4. *Contrariando o plano real, um comerciante aumenta o preço de um produto que custava R\$ 300,00 em 20%. Um mês depois arrependeu-se e fez um desconto de 20% sobre o preço reajustado. Qual o novo preço do produto?*

Exercício 5. *Um fabricante de chocolate cobrava R\$ 5,00 por uma barra de 250 gramas. Recentemente o peso da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu preço continuou R\$ 5,00. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?*

Exercício 6. *Um produtor de arroz vendeu 60% da sua produção para a distribuidora A e 40% para a distribuidora B, as quais doaram 4% e 2%, respectivamente, do arroz comprado. Qual a porcentagem do arroz produzido foi doada?*

Exercício 7. *Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:*

Exercício 8. *Um produto sofreu um aumento de 25%. Em seguida, devido a variações no mercado, seu preço teve que ser reduzido também em 25%, passando a custar R\$225,00. Qual o preço desse produto antes do aumento?*

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. *Joãozinho andava pela rua quando avistou em uma loja o seguinte anúncio:*

"Tudo com 50% de desconto".

Admirado e tratando de se beneficiar com a promoção, Joãozinho entrou na loja e comentou com o vendedor: "Assim vocês devem ter prejuízo..." O vendedor explicou que, ainda assim, a margem de lucro da loja era de 20% sobre cada mercadoria. Neste caso, qual era a margem de lucro sobre cada mercadoria antes da promoção?

Exercício 10. *Num certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 10% e o da maçã subiu 2%. Quanto se gastará (em porcertagem) a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?*

Exercício 11. *Joãozinho gastou a metade do dinheiro que tinha com um presente que comprou para a sua mãe. Em seguida, gastou 30% do que lhe restou, na compra de um jogo, e ainda ficou com R\$ 63,00. Quantos reais tinha Joãozinho antes das compras?*

Exercício 12. *Aumentando 2% o valor um número inteiro positivo, obtemos o seu sucessor. Qual é a soma desses dois números?*

Exercício 13. *Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada, verificou-se que no aquário 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?*

Exercício 14. *Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de* 20% *de polpa e* 80% *de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?*

Exercício 15. *Na população de uma espécie rara de* 1000 *aves da floresta amazônica,* 98% *tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para* 95%*. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. *Numa festa, o número de pessoas que dançam é igual a* 25% *do número de pessoas que não dançam. Qual é a porcentagem do total de pessoas na festa que não dançam?*

Exercício 17. *Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser* 26%*.*

a) Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos casais?

b) Quantos homens e quantas mulheres haviam na festa depois da chegada dos casais?

Exercício 18. *Gabriel resolveu uma prova de matemática com questões de álgebra, geometria e lógica. Após checar o resultado da prova Gabriel observou que respondeu corretamente* 50% *das questões de álgebra,* 70% *das questões de geometria e* 80% *das questões de lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente* 62% *das questões de álgebra e lógica e* 74% *das questões de geometria e lógica. Qual a porcentagem de questões corretas da prova de Gabriel?*

Exercício 19. *Em uma certa empresa,* 10% *dos empregados recebem* 90% *de todo o dinheiro gasto com salários. A empresa está dividida em departamentos. É possível que em cada departamento o dinheiro gasto com os salários de quaisquer* 10% *dos empregados seja no máximo* 11% *do dinheiro gasto com todos os salários pagos naquele departamento?*

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. $a)12 \quad b)5,6 \quad c)13,5 \quad d)1$

2. *(Extraído e Adaptado do Vestibular da UFBA)*

a) $(4\%)^2 = (\frac{4}{100})^2 = (\frac{16}{10000}) = (\frac{0,16}{100}) = 0,16\%.$

b) $\sqrt{64\%} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%.$

c) $6\% \cdot 180 = \frac{6}{100} \cdot 180 = \frac{1080}{100} = 10,8.$

3. *(Extraído e Adaptado da OBMEP) As amostras que o gráfico expõe possuindo um percentual de álcool acima de 50% são as respostas para o exercício. Pelo gráfico, tratam-se das amostras 1, 2 e 3.*

4. *(Extraído do Vestibular da UNIMEP - Rio de Janeiro)*

a) Primeira situação: aumento de 20% faz com que o novo preço seja 120% do inicial:

$$120\% \cdot R\$\ 300,00 = R\$\ 360,00.$$

b) Segunda situação: desconto de 20% sobre o novo preço faz com que este seja 80% do anterior:

$$80\% \cdot R\$\ 360,00 = R\$\ 288,00.$$

Portanto, o novo preço será de R\$ 288,00.

5. *(Extraído da OBMEP) Na primeira situação, cada grama custa $5,00/250 = R\$\ 0,02$ enquanto que na segunda, cada grama custa $5,00/200 = R\$\ 0,025$. Assim, estamos pagando a mais $R\$0,005$ por cada grama. Para sabermos que fração percentual esse acréscimo representa no preço anterior, basta efetuarmos a divisão:*

$$\frac{0,005}{0,02} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

Ou seja, com o novo preço, estamos pagando 25% a mais do que pagávamos anteriormente por cada grama.

Observação: Veja que o acréscimo percentual no preço vale para qualquer quantidade de gramas. Assim, outra maneira de resolver o problema seria comparar a variação de preços para um múltiplo comum das duas quantidades. Anteriormente, por um quilo pagávamos $R\$5,00 \times 4 = R\$\ 20,00$. Com o novo preço, o valor sobe para $R\$5,00 \times 5 = R\$\ 25,00$. A diferença de R\$ 5,00 representa o aumento percentual de:

$$\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

6. *(Extraído do Vestibular da UFU - Minas Gerais)*

i) Porcentagem doada por A:

$$4\% \cdot 60\% = \frac{4}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{240}{10000}.$$

ii) Porcentagem doada por B:

$$2\% \cdot 40\% = \frac{2}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{80}{10000}.$$

iii) Porcentagem resultante:

$$\frac{240}{10000} + \frac{80}{10000} = \frac{320}{10000} = \frac{3,2}{100} = 3,2\%.$$

7. *i) Um desconto de 20% faz com que fiquemos com 80% do valor inicial V:*

$$80\% \cdot V = \frac{80}{100}V.$$

ii) Um desconto de 30% sobre o novo preço faz com que este seja 70% do anterior:

$$70\% \cdot 80\% \cdot V = \frac{70}{100} \cdot \frac{80}{100}V = \frac{56}{100}V = 56\% \cdot V.$$

Como só nos restou 56% do valor de V, os descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um desconto de $100\% - 56\% = 44\%$.

8. *(Extraído do Vestibular do CEFET - Ceará)*

i) Um aumento de 25% faz com que fiquemos com 125% do valor inicial V, ou seja, $125\% \cdot V$.

ii) Um desconto de 25% sobre o novo preço faz com que este seja 75% do anterior, ou seja, $125\% \cdot 75\% \cdot V$

iii) Igualando ao valor dado:

$$\begin{aligned} 125\% \cdot 75\% \cdot V &= 225 \\ \frac{125}{100} \cdot \frac{75}{100} \cdot V &= 225 \\ V &= 225 \cdot \frac{100}{125} \cdot \frac{100}{75} \\ V &= 240. \end{aligned}$$

Portanto, $V = R\$240,00$.

2 Exercícios de Fixação

9. *(Extraído do Clube de Matemática da OBMEP) Suponhamos que o preço original de venda de uma mercadoria fosse de R\$ 120,00. Na promoção, essa mercadoria valeria, então, R\$ 60,00. Se, para esta venda, a margem de lucro da loja é de 20% e o valor do produto é V, temos:*

$$\begin{aligned} 60 &= V + 20\% \cdot V \\ &= 1,2V \end{aligned}$$

Consequentemente, $V = R\$ 50,00$. O lucro original então seria de $120,00 - 50,00 = R\$ 70,00$, o que representa a margem de lucro de $\frac{70}{50} = 140\%$ sobre o valor de custo da mercadoria.

Comentário para professores:. *O valor arbitŕario referência de $R\$ 120,00$ para venda não tira a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso o valor de venda seja multiplicado por uma constante. A solução do caso geral é totalmente análoda trocando-se o valor de 120 por p arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.*

10. *(Extraído da OBMEP) Seja V o preço da dúzia de ovos que coincide com o preço da dezena de maçãs. Com a subida de 10% no preço dos ovos, a dúzia passará a custar $V + 10\%V = 1,1V$. Com a queda de 2% no preço das maçãs, elas passarão a custar $V - 2\%V = 0,98V$. Daí, antes o preço da compra pedida era $2V$ e agora passou para $2,08V$. Tivemos assim um aumento de $0,08$ que corresponde ao aumento percentual de:*

$$\frac{0,08V}{2V} = 0,04 = \frac{4}{100} = 4\%.$$

Observação: Veja que poderíamos ter atribuído um valor arbitrário para V e a resposta seria a mesma pois o percentual não se altera quando multiplicamos os valores por uma mesma constante.

11. *Seja x a quantidade inicial de dinheiro do Joãozinho.*

i) Após comprar o presente para a mãe, Joãozinho ficou com $\frac{x}{2}$.

ii) Após gastar 30% do que sobrou, ele ficou com

$$70\% \cdot \frac{x}{2} = \frac{70x}{200}.$$

Portanto, $\frac{70x}{200} = 63$ e $x = R\$ 180,00$.

12. *(Extraído da OBM) Como o aumento de 2% de um número x corresponde à 1, temos $\frac{2x}{100} = 1$ e $x = 50$. Portanto, seu sucessor é 51 e a soma de ambos é 101.*

13. *(Extraído da OBM)*
Seja $100p$ a quantidade de peixes no aquário. Se A e V denotam as quantidades de peixes amarelos e vermelhos, temos $A = 90p$ e $V = 10p$. Se após a morte de x peixes amarelos eles ainda constituiam 75% dos peixes restantes, temos $90p - x = \frac{75}{100}(100p - x)$, ou seja, $x = 60p$. Se morreram $60p$ dos $90p$ peixes amarelos, a mortandade foi de $\frac{60p}{90p} = \frac{2}{3} = \frac{66,\overline{6}}{100}$, ou seja, aproximadamente 67%.

14. *(Extraído da OBM) A mistura final tem $0,2$ litros de polpa e $3 + 0,8 = 3,8$ litros de água. A porcentagem de polpa em relação ao volume da mistura é $\frac{0,2}{4} = \frac{2}{40} = 0,05 = 5\%$.*

15. *(Extraído da OBM) Inicialmente existiam 980 aves com a cauda verde e 20 das demais. Após a epidemia, estas 20 aves correspondem a 5%, donde o total de aves agora é $20 \times 20 = 400$ (sendo 380 da cauda verde). Portanto, morreram 600 aves.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

16. *(Extraído da OBM) Sejam x e y os números de pessoas que dançam e que não dançam, respectivamente. Como $x = \frac{25}{100} \cdot y$, temos $y = 4x$. Portanto, a porcentagem do número de pessoas que não dançam é:*

$$\frac{y}{x+y} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\%.$$

17. *(Extraído da OBMEP)*

a) Sejam m o número de mulheres e h o número de homens antes da chegada dos cinco casais. Como o número de mulheres era quatro vezes o número dos homens, temos:

$$m = 4h.$$

Deste modo, a fração de homens pelo total de pessoas presentas antes da chegada dos cinco casais era:

$$\frac{h}{h+m} = \frac{h}{h+4h} = \frac{h}{5h} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

b) Após a chegada dos cinco casais, ficamos com $h + 5$ homens e $m + 5$ mulheres. Assim, o novo percentual de homens é:

$$\frac{h+5}{h+5+m+5} = \frac{h+5}{h+4h+10} = \frac{h+5}{5h+10}.$$

Fazendo $\frac{h+5}{5h+10} = \frac{26}{100}$, temos $h = 8$. Consequentemente $m = 4h = 32$ e após a chegada dos cinco casais teremos $8 + 5 = 13$ homens e $32 + 5 = 37$ mulheres.

18. *(Extraído da OBM) Sejam A, G e L as quantidades de questões de álgebra, geometria e lógica. Sabendo que ele acertou $70\% \cdot G$ e $80\% \cdot L$ questões de geometria e lógica, respectivamente, o percentual de questões respondidas corretamente incluindo esses dois assuntos é $\frac{0,7G + 0,8L}{G + L}$. Como o percentual anterior deve ser igual a 74%, temos:*

$$\begin{aligned} \frac{0,7G + 0,8L}{G + L} &= \frac{74}{100} \\ 0,04G &= 0,06L \\ G &= \frac{3L}{2}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, como ele acertou $50\% \cdot A$ *questões de álgebra, também podemos escrevver:*

$$\begin{aligned}\frac{0,5A+0,8L}{A+L} &= \frac{62}{100}\\ 18L &= 12A\\ A &= \frac{3L}{2}.\end{aligned}$$

A porcentagem de questões respondidas corretamente é:

$$\begin{aligned}\frac{0,5A+0,7G+0,8L}{A+G+L} &= \frac{0,5\cdot\frac{3}{2}L+0,7\cdot\frac{3}{2}L+0,8L}{\frac{3}{2}L+\frac{3}{2}L+L}\\ &= \frac{2,6}{4}\\ &= 65\%.\end{aligned}$$

19. *Sim, é possível. Considere uma empresa com* 100 *funcionários e consistindo apenas de dois departamentos: um com* 10 *funcionários que recebem* 90% *de todos os salários e outro com* 90 *funcionários recebendo os* 10% *restantes. Em cada departamento, distribua salários iguais para todos os funcionários. Em cada departamento, quaisquer* 10% *dos funcionários ganham exatamente* $10\% < 11\%$ *do dinheiro gasto com salários em tal departamento.*

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com