Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 1

Prof. Bruno Holanda & Emiliano Chagas

Aula 7

Semelhança & Segmentos Proporcionais

Neste capítulo, apresentaremos algumas estratégias para resolver problemas que envolvem razão de segmentos. Uma forma comum de trabalhar com razões de segmentos é através de triângulos semelhantes.

Definição: Dois triângulos ABC e XYZ são *semelhantes* se e somente se for possível construir uma relação entre os vértices do primeiro com os vértices do segundo de modo que todos os ângulos correspondentes seja iguais ($\angle ABC = \angle XYZ$, $\angle BCA = \angle YZX$ e $\angle CAB = \angle ZXY$) e que os lados correspondentes sejam proporcionais:

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX} = \lambda.$$

Além disso, λ é chamada razão de semelhança.

Notação: Utilizaremos o símbolo ($\sim$) para denotar dois triângulos semelhantes. Por exemplo, neste caso, $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$. Veja também que dois triângulos semelhantes serão congruentes quando $\lambda = 1$.

Para provar que dois triângulos são semelhantes, temos três casos:

I. **Dois ângulos correspondentes iguais.** Assim,

$$[\angle ABC = \angle XYZ \;\text{ e }\; \angle BCA = \angle YZX] \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ.$$

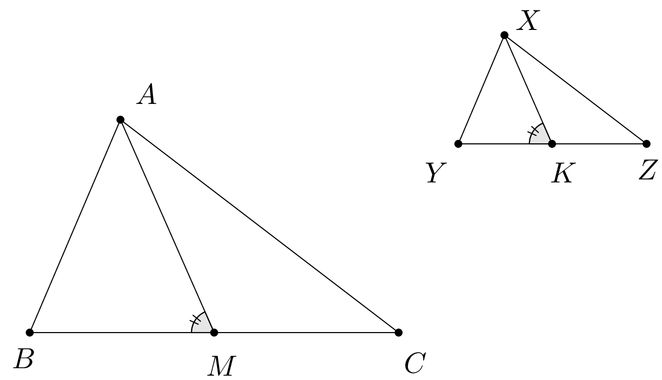
II. **Dois pares de lados correspondentes proporcionais e o ângulo entre eles igual.** Assim,

$$\left[\angle ABC = \angle XYZ \;\text{ e }\; \frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ}\right] \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ.$$

III. **Todos os pares de lados correspondentes proporcionais.** Assim,

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ.$$

Quando temos dois triângulos semelhantes, todos os segmentos correspondentes nos dois triângulos serão proporcionais e todos os ângulos correspondentes serão iguais. Por exemplo, se $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$ e M é o ponto médio de BC e K é o ponto médio de YZ, então $\angle AMB = \angle XKY$ e $\frac{AN}{XK} = \frac{BC}{YZ} = \lambda$. Propriedades análogas podem ser deduzidas para quaisquer segmentos ou ângulos correspondentes em dois triângulos semelhantes.



Fato importante. Se $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$, então:

$$\frac{[ABC]}{[XYZ]} = \left(\frac{AB}{XY}\right)^2 = \lambda^2.$$

Ou seja, a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança.

Demonstração. Seja H o pé da altura relativa ao vértice A até o lado BC e seja T o pé da perpendicular de X até o lado YZ. Pela semelhança, $\frac{AH}{XT} = \frac{BC}{YZ}$. Multiplicando os dois lados dessa equação por $\frac{BC}{YZ}$, obtemos:

$$\frac{AH \times BC}{XT \times YZ} = \left(\frac{BC}{YZ}\right)^2.$$

Por outro lado, $[ABC] = \frac{AH \times BC}{2}$ e $[XYZ] = \frac{XT \times YZ}{2}$. Calculando a razão entre essas duas últimas igualdades, chegamos à identidade do enunciado.

Outra forma de utilizar segmentos proporcionais é através do Teorema de Tales:

Teorema de Tales: Sejam r, s e t três retas paralelas e sejam u e v duas transversais que determinam sobre as retas r, s e t os pontos A, B, C e D, E, F, respectivamente (Figura 1). Então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}. \tag{1}$$

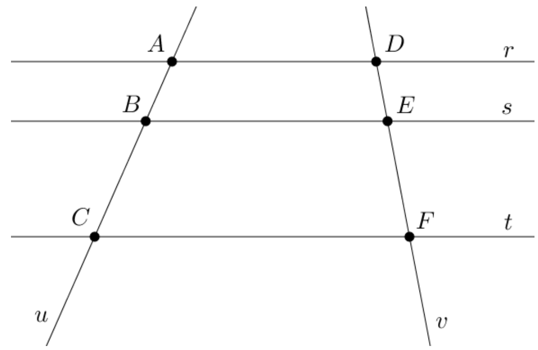
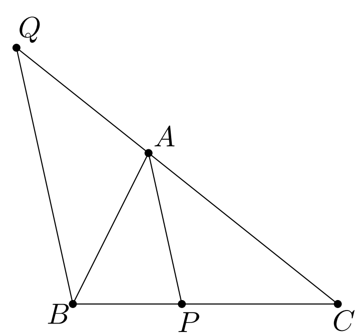


Figura 1: três retas paralelas cortadas por duas transversais em segmentos proporcionais.

Caso o leitor esteja interessado na demonstração do Teorema de Tales, recomendamos a leitura do livro Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2, Geometria Euclidiana Plana, do autor Antônio Caminha Muniz Neto. Agora iremos demonstrar dois fatos importantes:

Teorema da bissetriz interna (TBI): Seja ABC um triângulo e P o pé da bissetriz do ângulo $\angle BAC$. Então,

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}.$$



Demonstração. Seja Q um ponto sobre o prolongamento CA tal que $AQ = AB$. Como ABQ é isósceles, $\angle AQB = \angle ABQ = \alpha$. Assim, $\angle BAC = 2\alpha$ e $\angle BAP = \angle PAC = \alpha$. Portanto, $AP \parallel BQ$. Assim, pelo teorema de Tales:

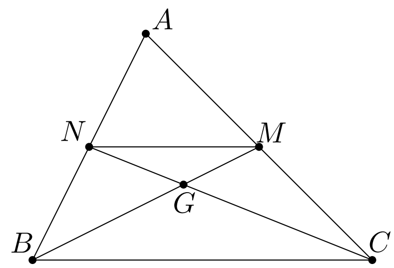
$$\frac{PC}{AC} = \frac{BP}{AQ} \Rightarrow \frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}.$$

Observação. Também podemos demonstrar que a recíproca do teorema da bissetriz interna é verdadeiro. Ou seja, que se P é um ponto sobre o lado BC do ΔABC tal que $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}$, então P é o pé da bissetriz do $\angle BAC$. Para isso, utilize a mesma construção e a recíproca do teorema de Tales.

Fato importante: Sejam M e N os pontos médios dos lados AC e AB do triângulo ABC. Seja G o ponto de interseção entre BM e CN. Então:

(a) $MN = \frac{BC}{2}$ e $MN \parallel AB$.

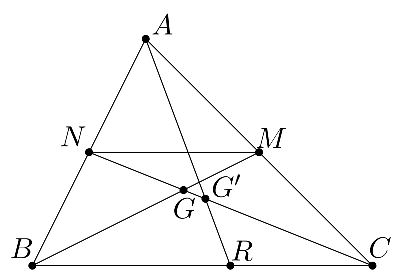
(b) $\frac{MG}{GB} = \frac{NG}{GC} = \frac{1}{2}$.



Demonstração. Por definição de ponto médio, $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$. Logo, $\Delta AMN \sim \Delta ABC$. Dessa forma, $MN = \frac{BC}{2}$ e $\angle ANM = \angle ABC$ (consequentemente, $MN \parallel AB$). Sendo MN e BC paralelas, $\angle MNG = \angle GCB$. Além disso, $\angle NGM = \angle BGC$, pois são opostos pelo vértice. Daí, $\Delta NGM \sim \Delta BGN$. Com isso, mostramos que

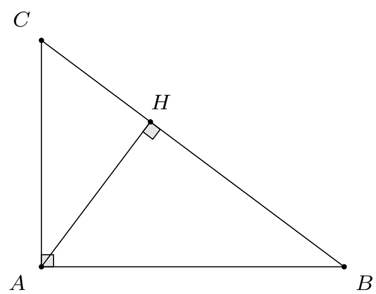
$$\frac{MG}{GB} = \frac{NG}{GC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Observação. A partir do resultado anterior, podemos demonstrar que as três medianas de um triângulo são concorrentes. De fato, seja R o ponto médio de BC e seja G' o ponto de encontro de AR e CN. Pelo resultado que demonstramos, $\frac{NG'}{G'C} = \frac{1}{2}$. Pela unicidade da razão de um segmento, $G \equiv G'$.



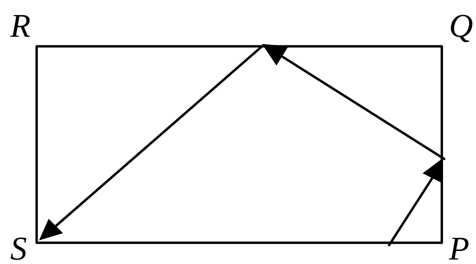
Problemas Introdutórios

Problema 1. No triângulo ABC, $\angle BAC = 90°$ e AH é a altura relativa à hipotenusa. Mostre que $AH^2 = BH \times HC$.



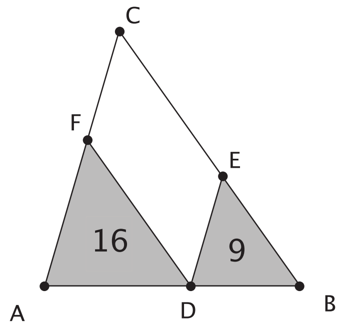
Problema 2. (OBM 2010 - 1ª Fase) No triângulo ABC, $\angle BAC = 140°$. Sendo M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AB e P o ponto sobre o lado AC tal que MP é perpendicular a AC, qual é a medida do ângulo NMP?

Problema 3. (OBM 2007 - 1ª Fase) Uma mesa de bilhar tem dimensões de 3 metros por 6 metros e tem caçapas nos seus quatro cantos P, Q, R e S. Quando uma bola bate na borda da mesa, sua trajetória forma um ângulo igual ao que a trajetória anterior formava.



Uma bola, inicialmente a 1 metro da caçapa P, é batida do lado SP em direção ao lado PQ, como mostra a figura. A quantos metros de P a bola acerta o lado PQ se a bola cai na caçapa S após duas batidas na borda da mesa?

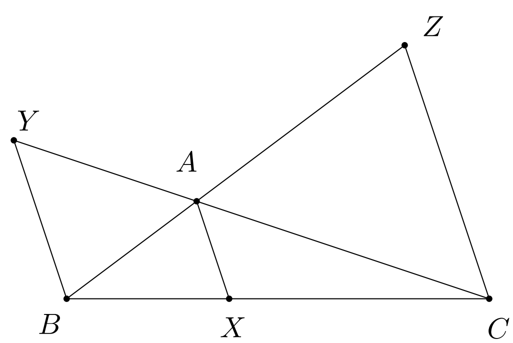
Problema 4. (OBMEP 2013 - 1ª Fase) Na figura, as retas DE e DF são paralelas, respectivamente, aos lados AC e BC do triângulo ABC. Os triângulos ADF e DBE têm áreas 16 e 9, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $CFDE$?



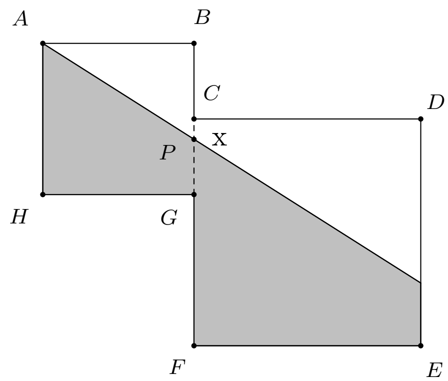
Problemas Propostos

Problema 5. Na figura abaixo, ABC é um triângulo e X, Y, Z são pontos sobre os lados BC, CA, AB, respectivamente. Sabendo que AX, BY, CZ são paralelos, prove que:

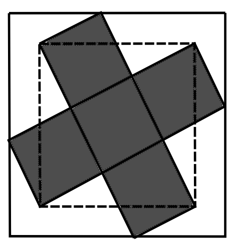
$$\frac{1}{AX} = \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ}.$$



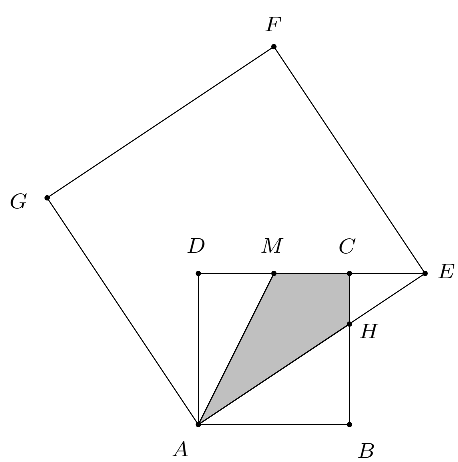
Problema 6. (OBM 2015 - 1ª Fase) Na figura, os quadrados $ABGH$ e $CDEF$ têm lados de medidas 4 e 6 cm, respectivamente. O ponto P pertence à reta contendo os pontos B, C, G, e F, sendo C o ponto médio do lado BG. A semirreta AP divide a figura formada pelos dois quadrados em duas regiões, uma branca e uma cinza. Para que essas duas regiões tenham áreas iguais, qual deve ser o valor de $x = CP$?



Problema 7. (OBM 2010 - 1ª Fase) Uma figura no formato de cruz, formada por quadrados de lado 1, está inscrita em um quadrado maior, cujos lados são paralelos aos lados do quadrado tracejado, cujos vértices são vértices da cruz. Qual é a área do quadrado maior?

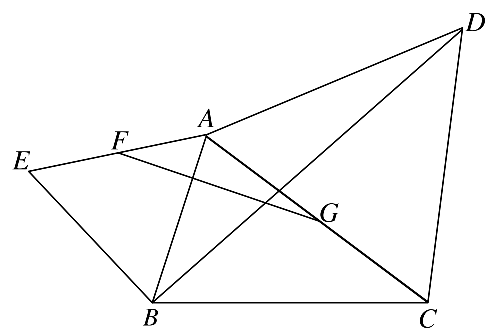


Problema 8. (OBM 2016 - 1ª Fase) Na figura a seguir, $AEFG$ e $ABCD$ são quadrados e o ponto E está na reta CD. Além disso, M é o ponto médio do segmento CD e C é o ponto médio do segmento ME. Sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lado 6, determine a razão entre as áreas do quadrilátero $CHAM$ e do quadrado $AEFG$.

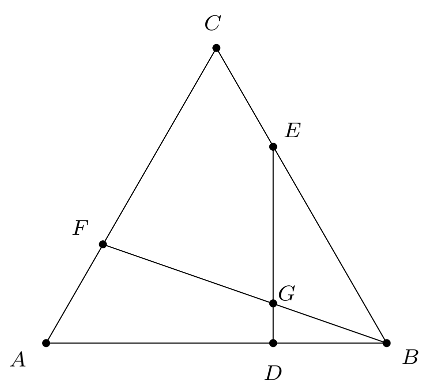


Problema 9. (OBM 2006 - 1ª Fase) Na figura a seguir, ABC é um triângulo qualquer e

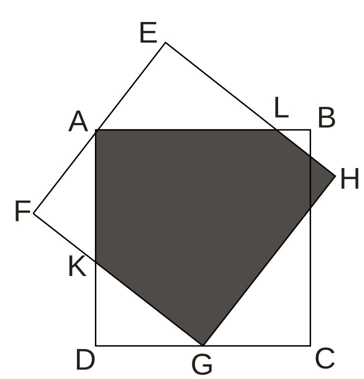
ACD e AEB são triângulos equiláteros. Se F e G são os pontos médios de EA e AC, respectivamente, a razão $\dfrac{BD}{FG}$ vale?



Problema 10. (OBM 2014 - 2ª Fase) No desenho abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = \dfrac{AB}{3}$. Determine a razão $\dfrac{EG}{GD}$.



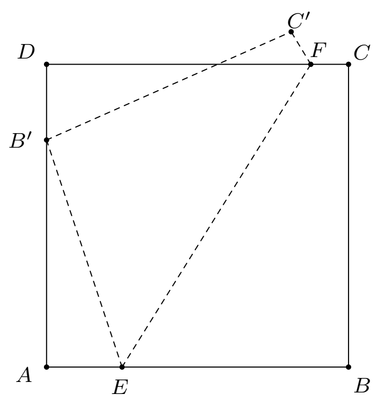
Problema 11. (OBM 2009 - 2ª Fase) Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGH$ são quadrados de lado 48 cm. Sabendo que A é o ponto médio de EF e G é o ponto médio de DC, determine a área destacada em cm^2.



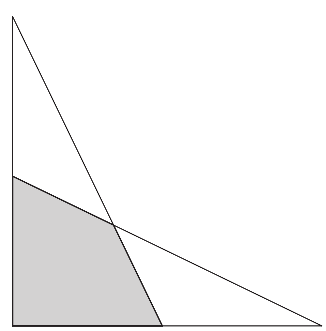
Problema 12. (OBM 2004 - 2ª Fase) Uma folha de papel retangular $ABCD$ foi dobrada de modo que o vértice B foi levado no ponto B' sobre o lado AD. A dobra é EF, com E sobre AB e F sobre CD. Sabe-se que $AE = 8$, $BE = 17$ e $CF = 3$.

a) Calcule a medida do segmento AB'.

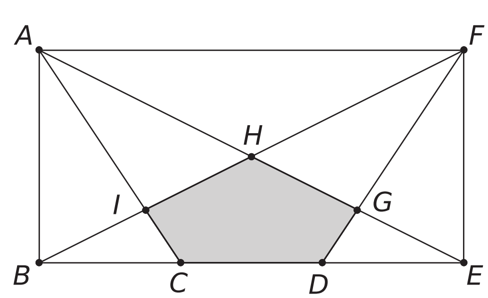
b) Calcule a medida do lado AD.



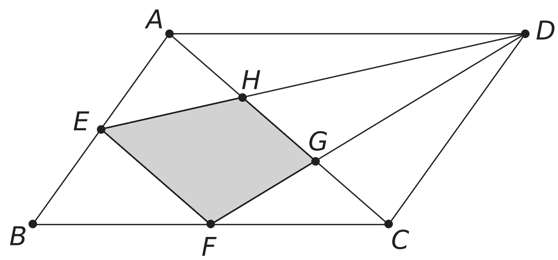
Problema 13. (OBMEP 2016 - 1ª Fase) Dois triângulos retângulos, ambos com catetos de medidas a e b , com $a > b$, são sobrepostos como na figura. Qual é a área do quadrilátero sombreado em termos de a e b?



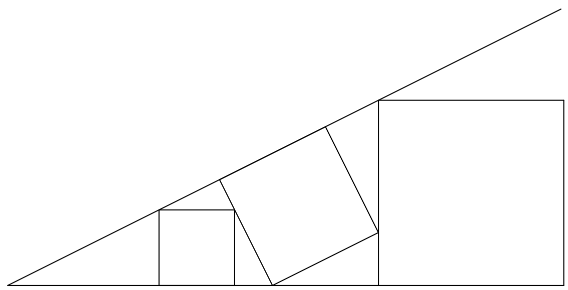
Problema 14. (OBMEP 2016 - 1ª Fase) Na figura, $ABEF$ é um retângulo e $BC = CD = DE$. Qual é a razão entre as áreas do pentágono $CDGHI$ e do retângulo $ABEF$?



Problema 15. (OBMEP 2014 - 1ª Fase) O paralelogramo $ABCD$ tem área 24 cm^2 e os pontos E e F são os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $EFGH$?

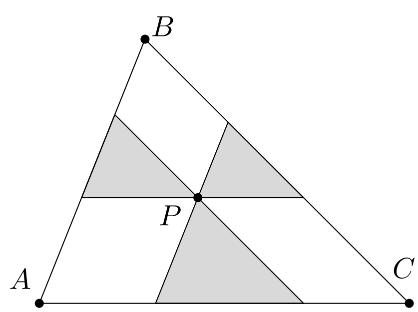


Problema 16. Na figura abaixo existem três quadradro de lados $3 < 4 < x$. Determine x.



Problema 17. Na figura a seguir, P é um ponto interno ao triângulo ABC pelo qual desenhamos três retas paralelas aos lados do triângulo. Se $S = [ABC]$ e S_1, S_2 e S_3 são as áreas dos triângulos menores sombreados, mostre que

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$



Problema 18. Uma reta passando pelo vértice A do quadrado $ABCD$ intersecta o lado CD em E e a semireta $\overrightarrow{BC}$ em F. Prove que

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

Problema 19. Um ponto E é escolhido no interior do lado AC de um triângulo ABC. São escolhidos pontos D e F sobre AB e BC, respectivamente, de modo que $DE \parallel BC$ e $EF \parallel AB$. Prove que

$$[BDEF] = 2\sqrt{[ADE][EFG]}.$$

Problema 20. (Maio 2000) Seja ABC um triângulo com $\angle BAC = 90°$ e tal que $AC = 1$. A bissetriz do ângulo $\angle BAC$ corta a hipotenusa no ponto R. A reta perpendicular à reta AR passando por R corta AB em seu ponto médio. Qual é a medida do lado AB?

Problema 21. (Banco IMO 1983) Seja ABC um triângulo e D, E, F pontos (sendo E e F fora do triângulo e D dentro) tais que os triângulos ABE, ACF e BDC são isósceles com $\angle BEA = \angle AFC = \angle BDC$. Mostre que $AFDE$ é um paralelogramo.

Problema 22. Sejam ABC um triângulo com baricentro G e ℓ uma reta que passa por G e corta os lados AB e AC do triângulo. Sejam D, E e F os pés das perpendiculares de A, B e C até ℓ, respectivamente. Prove que $AD = BE + CF$.

Problema 23. (Maio 2006) Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD. Seja O o ponto de interseção de suas diagonais AC e BD. Se a área do triângulo ABC é 150 e a área do triângulo ACD é 120, calcular a área do triângulo BOC.

Problema 24. Seja $ABCD$ um retângulo com área 1, e E um ponto sobre CD. Qual é a área do triângulo formado pelos baricentros dos triângulos ABE, BCE, e ADE?

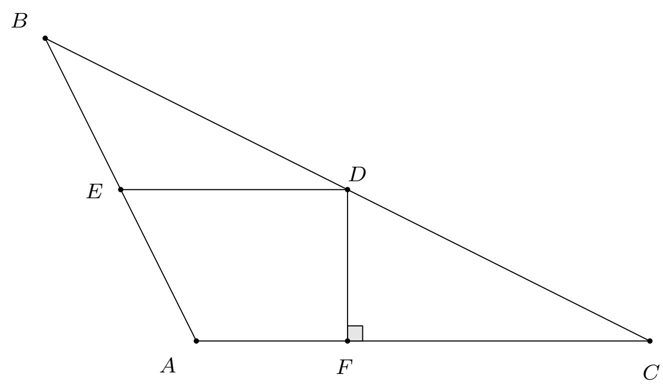
Problema 25. (Maio 2018) Em um paralelogramo $ABCD$, seja M o ponto sobre o lado BC tal que $MC = 2BM$ e seja N o ponto sobre o lado CD tal que $NC = 2DN$. Se a distância do ponto B à reta AM é 3, calcule a distância do ponto N à reta AM.

Problema 26. (Alemanha 2003) Seja $ABCD$ um paralelogramo. Sejam X e Y pontos sobre os lados AB e BC, respectivamente tais que $AX = CY$. Prove que a interseção de AY e CX está sobre a bissetriz de $\angle ADC$.

Dicas e Soluções

1. Observe que $\Delta AHC \sim BHA$ (dois pares de ângulos iguais). Assim, $\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}$. Multiplicando em cruz, chegamos ao resultado procurado.

2. (OBM 2010 - 1ª Fase)



   Os triângulos BNM e BAC são semelhantes pelo caso LAL, ou seja, dois pares de lados correspondentes proporcionais e o ângulo entre eles igual. Então os segmentos AC e NM são paralelos. Assim, os ângulos NMP e MPC devem ser iguais, e como MPC é igual a $90°$, temos que NMP também é igual a $90°$.

3. (OBM 2007 - 1ª Fase) Sejam B e C os pontos de batida da bola em PQ e QR, respectivamente, e A o ponto onde a bola está inicialmente. Como os ângulos das trajetórias de batida com a mesa são iguais, deveremos ter os triângulos APB, CQB e CRS semelhantes. Seja $BP = x$. Assim: $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{CQ}{BQ} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{CQ}{3-x} \Leftrightarrow CQ = \dfrac{3}{x} - 1$, $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{CR}{RS} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{7-\frac{3}{x}}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{7}$.

4. (OBMEP 2013 - 1ª Fase) Os triângulos ADF e DEB são semelhantes por terem lados paralelos. A razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança; como $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$, segue que essa razão é $\dfrac{4}{3}$. Como $DECF$ é um paralelogramo, temos $CF = ED$ e daí $\dfrac{AF}{CF} = \dfrac{AF}{ED} = \dfrac{4}{3}$. Os triângulos ABC e ADF são semelhantes, sua razão de semelhança é $\dfrac{AC}{AF} = \dfrac{AF+CF}{AF} = 1 + \dfrac{CF}{AF} = 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$. Logo, a área do triângulo ABC é $\left(\dfrac{7}{4}\right)^2 \cdot 16 = 49$ e $[DECF] = 49 - 16 - 9 = 24$.

5. Em primeiro lugar, veja que a equação do enunciado pode ser reescrita como

$$1 = \frac{XC}{BC} + \frac{XB}{BC}.$$

Note que $\Delta CXA \sim \Delta CBY$. Assim,

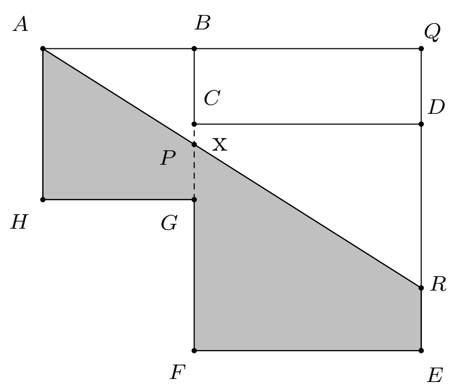
$$\frac{AX}{BY} = \frac{XC}{BC}.$$

Note que $\Delta BXA \sim \Delta BZC$. Assim,

$$\frac{AX}{CZ} = \frac{BX}{BC}.$$

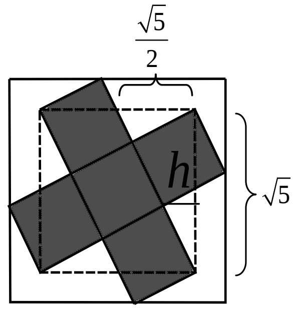
Somando as duas equações encontradas e usando o fato que $BX + XC = BC$, o resultado segue de imediato.

6. (OBM 2015 - 1ª Fase) Sejam Q a interseção de AB e DE e R a interseção de AP e DE.



Como os triângulos ABP e AQR possuem dois pares de ângulos correspondentes, então eles são semelhantes. Temos $\frac{AB}{AB+BQ} = \frac{AB}{AQ} = \frac{BP}{QR} = \frac{BC+CP}{QD+DR}$. Como $BC = QD = 2$, $BQ = 6$, $AB = 4$ e $CP = x$, segue que $\frac{5x}{2} + 3 = DR$. A área branca corresponde a metade da soma das áreas dos quadrados, portanto, podemos escrever: $(4+2x) + \left(\frac{21x}{2} + 9\right) = [ABP] + [CPRD] = 8 + 18 = 26$. Resolvendo a última equação, encontramos $x = \frac{26}{25}$.

7. (OBM 2010 - 1ª Fase)



Com respeito ao quadrado pontilhado, cada triângulo destacado exterior a esse quadrado corresponde a um triângulo branco no interior do mesmo. Concluímos assim que sua área vale 5. Seja h a distância do vértice direito do quadrado central ao lado direito do quadrado pontilhado. Por semelhança temos: $\frac{h}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{5}}{2}$

8. (OBM 2016 - 1ª Fase) Como o lado do quadrado mede 6, temos $DM = MC = CE = 3$. Os triângulos CEH e DEA são semelhantes, uma vez que possuem dois pares de ângulos correspondentes iguais. Daí, $\frac{CH}{DA} = \frac{CE}{DE} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Portanto, $CH = \frac{6}{3} = 2$ e $HB = CB - CH = 4$. A área do quadrilátero $CHAM$, denotada por $[CHAM]$, pode ser obtida através da equação: $[CHAM] = [ACM] + [ACH] = \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{2 \cdot 6}{2} = 15$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ADE, temos $[AEFG] = AE^2 = AD^2 + DE^2 = 117$. Logo, $\frac{[CHAM]}{[EFG]} = \frac{15}{117} = \frac{5}{39}$.

9. (OBM 2006 - 1ª Fase) Como $\frac{AG}{AD} = \frac{1}{2}$, bem como $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$ e além disso $\angle DAB = 60° + \angle GAB = \angle GAF$, então temos que os triângulos DAB e GAF são semelhantes com razão de semelhança 2. Desse modo $\frac{BD}{FG} = 2$.

10. (OBM 2014 - 2ª Fase) Seja $[XYZ]$ a área do triângulo XYZ, a razão $\frac{EG}{GD}$ pode ser calculada através das razões de áreas: $\frac{EG}{GD} = \frac{[EGB]}{[GDB]} = \frac{[EFG]}{[FDG]} = \frac{[EGB] + [EFG]}{[GDB] + [FDG]} = \frac{[EFB]}{[FDB]}$. Além disso temos $\frac{[EFB]}{[ABC]} = \frac{[EFB]}{[CFB]} \cdot \frac{[CFB]}{[ABC]} = \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{CA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Analogamente, $\frac{[FDB]}{[ABC]} = \frac{1}{9}$. Finalmente, $\frac{EG}{GD} = \frac{[EFB]}{[ABC]} \cdot \frac{[ABC]}{[FDB]} = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4$.

11. (OBM 2009 - 2ª Fase) Por simetria, veja que $KD = KF$ e $AK = KG$. Considere $FK = x$. Dessa forma, $AK = 48 - x$. Usando teorema de Pitágoras no triângulo AFK , temos: $24^2 + x^2 = (48 - x)^2 \Leftrightarrow x = 18$. Agora, veja que os triângulos AFK e ALE são semelhantes. Portanto, $\frac{AE}{FK} = \frac{EL}{AF}$, assim, $EL = 32$. Para achar a área

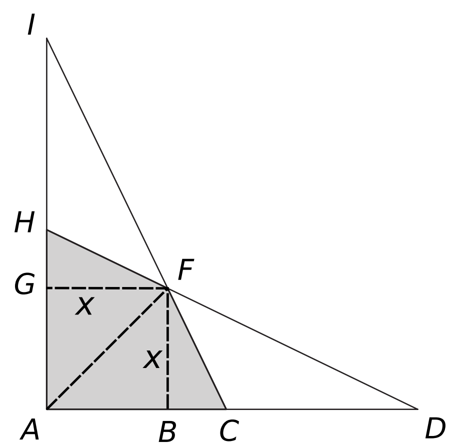
procurada, basta subtrair a área do quadrado EFGH das áreas dos triângulos AFK e AEL. Portanto a área será 1704.

12. (OBM 2004 - 2ª Fase)

    a) A partir da dobra da folha podemos ver que $B'E = BE = 17$, e como $AE = 8$, aplicando o teorema de Pitágoras temos $AB' = \sqrt{B'E^2 - AE^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

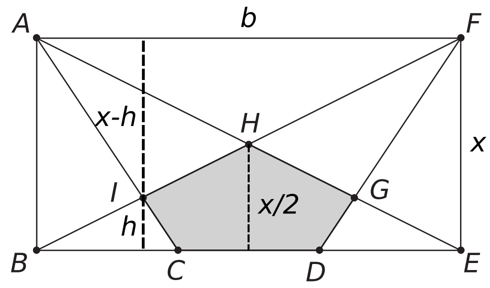
    b) Temos que $AB = AE+BE = 8+17 = 25 = CD$ e $DF = CD-CF = 25-3 = 22$. Seja G a intersecção de $B'C'$ e CD. Como $FC' = FC$ e $\Delta AB'E \sim \Delta DGB' \sim \Delta C'GF$, $\dfrac{FG}{B'E} = \dfrac{FC'}{AE} \Leftrightarrow \dfrac{FG}{17} = \dfrac{3}{8} \Leftrightarrow FG = \dfrac{51}{8}$. Logo, $DG = CD-CF-FG = 25 - 3 - \dfrac{51}{8} = \dfrac{125}{8}$. Temos também que $\dfrac{DB'}{AE} = \dfrac{DG}{AB'} \Leftrightarrow \dfrac{DB'}{8} = \dfrac{\frac{125}{8}}{15} \Leftrightarrow DB' = \dfrac{25}{3}$. Finalmente, $AD = AB' + DB' = 15 + \dfrac{25}{3} = \dfrac{70}{3}$.

13. (OBMEP 2016 - 1ª Fase) Na figura, os segmentos auxiliares FG e FB são perpendiculares aos catetos AH e AC, respectivamente. Usaremos a notação AB tanto para indicar o segmento, como para sua medida.



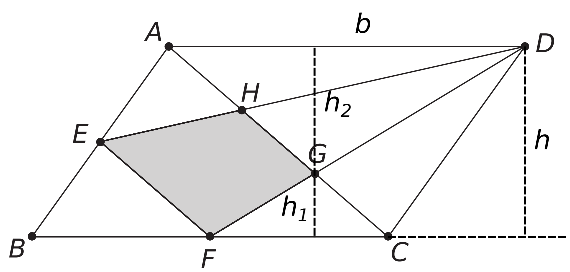
Usando a simetria da figura, se $FG = FB = x$, então, $ABFG$ é um quadrado de lado x, logo, $FG = FB = AB = AG = x$. Além disso, dos dados do problema temos que $AC = AH = b$ e $AI = AD = a$. Por outro lado, os triângulos BDF e ADH são semelhantes; logo, vale a seguinte relação $\dfrac{a-x}{a} = \dfrac{x}{b} \Leftrightarrow x = \dfrac{ab}{a+b}$. Finalmente, a área do quadrilátero $ACFH$ (ele pode ser decomposto nos triângulos AFH e por AFC) é dada por $[ACFH] = 2\dfrac{b \cdot x}{2} = b \cdot x = \dfrac{ab^2}{a+b}$.

14. (OBMEP 2016 - 1ª Fase) Sejam x o lado menor do retângulo $ABEF$, b o lado maior de $ABEF$ e h a altura do triângulo BCI com relação ao lado BC.



A área do triângulo BHE é $\frac{1}{4}$ da área do retângulo $ABEF$, ou seja, igual a $\dfrac{b \cdot x}{4}$. Como os triângulos BIC e FIA são semelhantes, $\dfrac{h}{x-h} = \dfrac{\frac{b}{3}}{b} \Leftrightarrow h = \dfrac{x}{4}$. $[BIC] = [GDE] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b}{3} \cdot \dfrac{x}{4} = \dfrac{b \cdot x}{24}\dfrac{[ABEF]}{24}$. Portanto, $[CDGHI] = \dfrac{[ABEF]}{4} - \dfrac{[ABEF]}{24} - \dfrac{[ABEF]}{24} = \dfrac{[ABEF]}{6} \Leftrightarrow \dfrac{[CDGHI]}{[ABEF]} = \dfrac{1}{6}$.

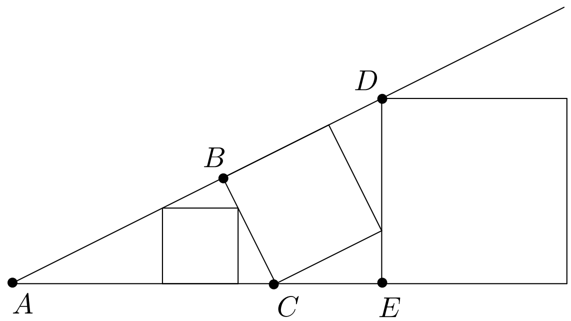
15. (OBMEP 2014 - 1ª Fase) Sejam b a medida da base do paralelogramo e h sua altura.



Então:$[ABC] = 24 \Leftrightarrow b \cdot h = 24$. $\Delta GCF \sim \Delta GDA \Leftrightarrow \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\frac{b}{2}}{b} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow h_2 = 2h_1 \Leftrightarrow 3h_1 = h \Leftrightarrow h_1 = \dfrac{h}{3}$. Portanto $[GFC] = \dfrac{\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{3}}{2} = \dfrac{b \cdot h}{12} = \dfrac{24}{12} = 2$. Da mesma forma, também podemos concluir que $[AHE] = 2$. Vamos calcular agora a área $[BEF]$, lembrando que triângulos semelhantes possuem áreas relacionadas com o quadrado da constante de proporcionalidade. $\Delta EBF \sim \Delta ABC \Leftrightarrow \dfrac{EBF}{ABC} = \left(\dfrac{\frac{b}{2}}{b}\right) = \dfrac{1}{4}$. Então $[EBF] = \dfrac{[ABC]}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$. Agora vamos calcular a área do quadrilátero $EFGH$ por diferença: $[EFGH] = [ABC] - [GFC] - [AEH] - [EBF] = 12 - 2 - 2 - 3 = 5$ cm^2.

16. Marque os pontos A, B, C, D e E na figura conforme ilustrado a seguir. Veja que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, pois têm dois pares de ângulos iguais. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 as medidas dos lados dos quadrados inscritos nos triângulos ABC e ADE, respectivamente. Então,

$$\frac{\ell_1}{BC} = \frac{\ell_2}{DE} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{16}{3}.$$



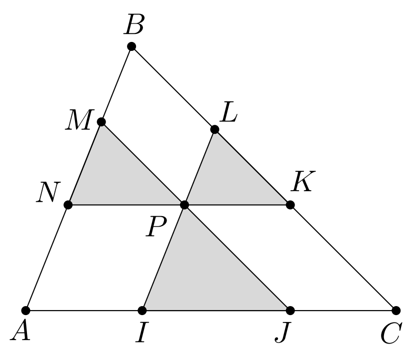
17. Marque os pontos M, N, I, J, K e L na figura conforme ilustrado a seguir. Sejam $S_1 = [MNP]$, $S_2 = [LKP]$ e $S_3 = [PIJ]$. Todos esses triângulo são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo ABC. Além disso, $BMPL$ e $NPIA$ são paralelogramos. Assim, $LP = BM$ e $PI = AN$. Pelas semelhanças, obtemos:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 \qquad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{LP}{AB}\right)^2 \qquad \frac{S_3}{S} = \left(\frac{PI}{AB}\right)^2$$

Tirando a raiz quadrada dessas três equações e, em seguida, somando os resultados, obtemos.

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{MN}{AB} + \frac{BM}{AB} + \frac{NA}{AB} = 1.$$

Elevando ao quadrado, chegamos à equação do enunciado.



18. Seja ℓ a medida do lado do quadrado $ABCD$ e $x = DE$. Observe que a equação do enunciado é equivlente a

$$1 + \left(\frac{AE}{AF}\right)^2 = \frac{AE^2}{\ell^2}.$$

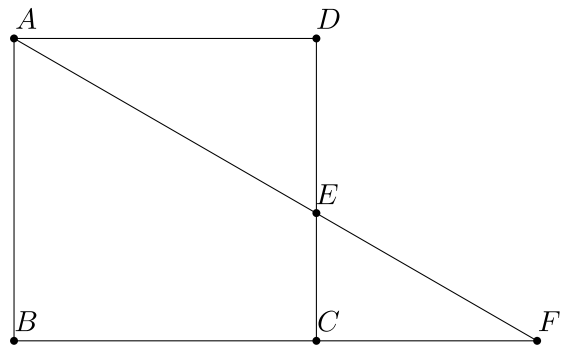
Por outro lado, $\Delta ADE \sim \Delta ABF$. Logo,

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{x^2}{\ell^2}.$$

Substituindo na primeira equação encontrada, devemos demonstrar que

$$1 + \frac{x^2}{\ell^2} = \frac{AE^2}{\ell^2}.$$

Porém, essa última equação é equivalente ao teorema de Pitágoras no ΔADE.



19. Sejam $S = [ABC]$, $S_1 = [EFC]$ e $S_2 = [ADE]$. A equação inicial pode ser reescrita como

$$S - S_1 - S_2 = 2\sqrt{S_1 S_2} \iff S = S_1 + 2\sqrt{S_1 S_2} + S_2 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

$$\iff 1 = \left(\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}\right)^2.$$

Por outro lado,

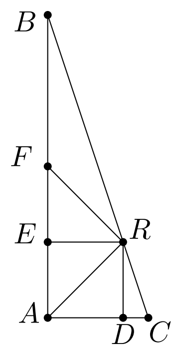
- $\Delta EFC \sim \Delta ABC \Rightarrow \left(\frac{EC}{AC}\right)^2 = \frac{S_1}{S} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{EC}{AC}$.
- $\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \frac{S_2}{S} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{AE}{AC}$.

Como $AE + EC = AC$, segue que $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = 1$.

20. Sejam M o ponto médio de AB, P o pé da perpendicular de R até AC, e Q o pé da perpendicular de R até AB. Seja $x = PC$ e $1 - x = PA$. Note que $APRQ$ é um quadrado. Além disso, como ARQ é isósceles, Q é o ponto médio de MA. Daí, $QA = QM = 1 - x$. Logo, $AB = 4(1 - x)$. Agora veja que $\Delta BQR \sim \Delta RPC$, então:

$$\frac{BQ}{QR} = \frac{RP}{PC} \Rightarrow \frac{3(1-x)}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow 3x = 1 - x \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Portanto, $BA = 4\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3$.



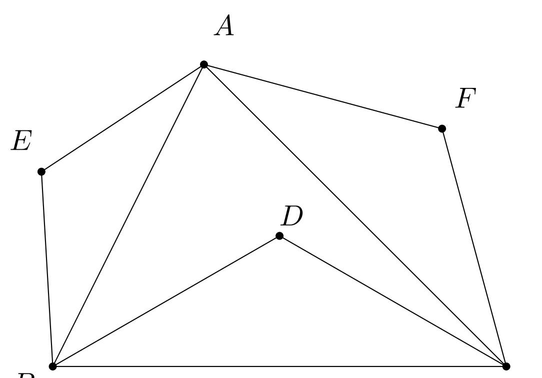
21. Em primeiro lugar, observe que $\Delta BDC \sim \Delta AFC$, pois têm todos os pares de ângulos correspondentes iguais. Daí, $\frac{FC}{CD} = \frac{AC}{BD}$. Com isso, note que $\Delta FDC \sim \Delta ABC$ pois tem um par de ângulos correspondentes iguais ($\angle DCF = \angle BCA$) e os pares de lados adjacentes a este ângulo são proporcionais. Portanto,

$$\frac{FC}{AC} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow DF = \frac{FC \times AB}{AC}.$$

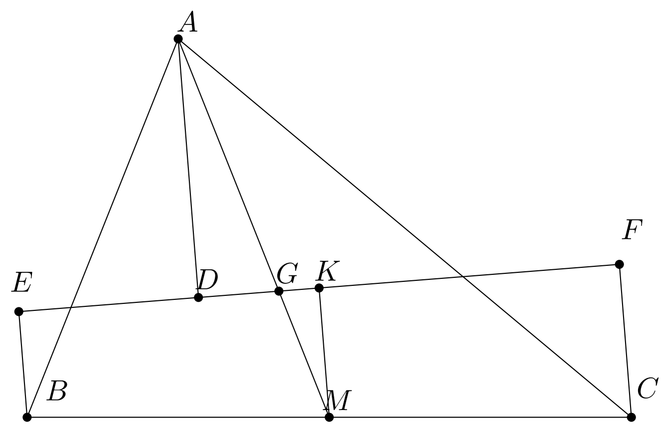
Por outro lado, $\Delta BEA \sim \Delta AFC$, então:

$$\frac{EA}{FC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow EA = \frac{FC \times AB}{AC}.$$

Logo, $DF = AE$. De modo análogo, podemos demonstrar que $ED = AF$. Portanto, $AFDE$ é um paralelogramo.



22. Seja M o ponto médio de BC e K o pé da perpendicular de M até ℓ. Como $BEFC$ é um trapézio, MK é sua base média. Portanto, $MK = \frac{BE+CF}{2}$. Por outro lado, os triângulos ADG e GKM são semelhantes e como $AG = 2GM$, segue que $AE = 2MK$. Daí, segue o resultado.



23. Observe que os triângulos CAB e DAB têm a mesma área pois têm a mesma base e a mesma altura. Observe que AOB é uma área comum aos dois triângulos. Logo, BOC e AOD também têm a mesma área. Seja $S = [BOC] = [AOD]$. Assim, $[AOB] = 150 - S$ e $[COD] = 120 - S$.

    Por outro lado, se h é a medida da altura do trapézio, temos que

    $$\frac{150}{120} = \frac{[ABC]}{[ACD]} = \frac{AB \times h}{CD \times h} = \frac{AB}{CD}.$$

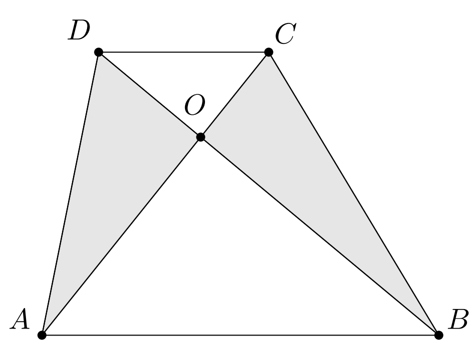
    Agora veja que $\Delta AOB \sim \Delta COD$, pois os dois triângulos têm todos os ângulos iguais. Portanto,

    $$\frac{[AOB]}{[COD]} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{150}{120}\right)^2.$$

    Simplificando os termos, temos que

    $$\frac{150 - S}{120 - S} = \frac{25}{16}.$$

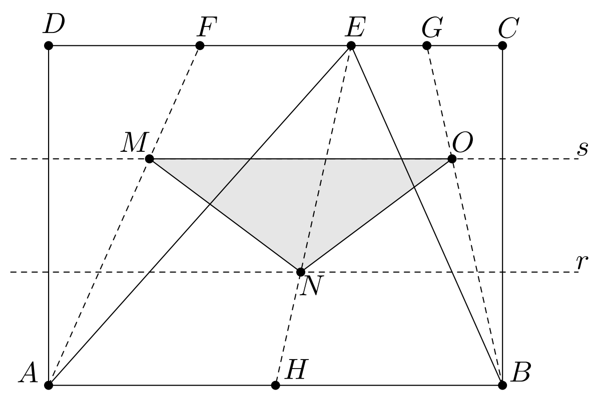
    Multiplicando em cruz e resolvendo a equação, achamos que $S = \frac{200}{3}$.



24. Sejam F, G e H os pontos médios dos segmentos DE, EC e AB, respectivamente. Sejam M, N e O os baricentros dos triângulos ADE, EAB e ECB, respectivamente. Sejam s e r duas retas que dividem os lados AD e BC em três partes iguais conforme mostrado na figura. Sabemos que o baricentro de um triângulo divide as medianas desye triângulo em duas partes que estão na razão de 2 : 1. Portanto, os pontos M e O estão sobre a reta s e o ponto N está sobre a reta r. Sejam $x = DF = FE$, $y = EG = GC$ e $z = \frac{AD}{3}$. Sejam ainda P e Q os pontos de interseção de AE e BE com a reta s, respectivamente. Podemos notar as seguintes igualdades derivadas de semelhanças entre triângulos:

    (i) $\Delta AMP \sim \Delta AFE \Rightarrow MP = \frac{2}{3}FE$;
    (ii) $\Delta OBQ \sim \Delta BGE \Rightarrow OQ = \frac{2}{3}EG$;
    (iii) $\Delta EPQ \sim \Delta EAB \Rightarrow PQ = \frac{1}{3}AB$.

    Assim, $MO = MP + OQ + PQ = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}2(x + y) = \frac{4}{3}(x + y)$. Dessa forma, $[MNO] = \frac{\frac{4}{3}(x+y)\frac{z}{3}}{2} = \frac{2(x+y)z}{9}$. Por outro lado, $[ABCD] = 2(x+y)z$ que pelo enunciado é igual a 1. Portanto, $[MNO] = \frac{1}{9}$.



25. Veja que basta calcular a razão entre as áreas dos triângulos ANM e ABM para descobrirmos a distância de N até AM. Seja $[ABCD] = S$ a área do paralelogramo. Veja que $[ABC] = \frac{S}{2}$ e que $\frac{[ABM]}{[ABC]} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$. Portanto $[ABM] = \frac{S}{6}$. De modo análogo, $[ADN] = \frac{S}{6}$. Agora veja que $\Delta CNM \sim \Delta CDB$ com razão de semelhança igual a $\frac{2}{3}$. Logo, como $[DCB] = \frac{S}{2}$, segue que

$$[CNM] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{S}{2} = \frac{2S}{9}.$$

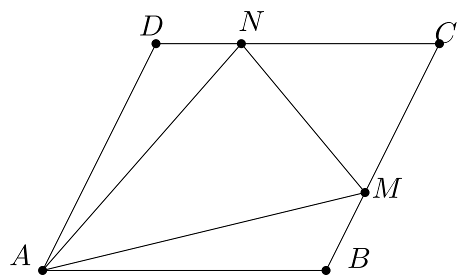
    Daí,

$$[AMN] = S - \frac{S}{6} - \frac{S}{6} - \frac{2S}{9} = \frac{4S}{9}.$$

    Agora veja que

$$\frac{[ANM]}{[ABM]} = \frac{\frac{4S}{9}}{\frac{S}{6}} = \frac{8}{3}.$$

Logo, a distância procurada é $\frac{8}{3} \cdot 3 = 4$.



26. Seja T o ponto de interseção entre AY e CX e seja P o ponto de interseção de AY e CD. Note que $\Delta AXT \sim \Delta TCP$, então

$$\frac{AX}{PC} = \frac{AT}{TP}.$$

Por outro lado, $\Delta YCP \sim \Delta PAD$, então

$$\frac{YC}{PC} = \frac{AD}{DP}.$$

Como $AX = YC$, então $\frac{AT}{TP} = \frac{AD}{DP}$. Portanto, pelo teorema da bissetriz interna, DT é bissetriz no ΔADP.